# A PROPOS DE LA GEOMETRIE PLANE

**(élément du document d'accompagnement**

**du programme de mathématiques de la classe de seconde)**

*Les problèmes proposés ci-dessous illustrent les choix faits par le programme dans le deuxième paragraphe de géométrie. Ces énoncés ont, pour la plupart, été fournis aux professeurs chargés de mettre en œuvre de façon anticipée le programme durant l'année 1999-2000.*

*- Il s'agit de problèmes que les acquis de collège permettent de traiter.*

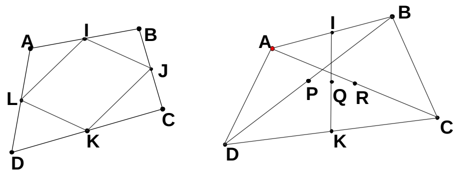
*- Ces problèmes montrent la richesse mathématique qu'il est possible de développer dans le cadre modeste défini par le programme. Certains sont d'un abord relativement immédiat ; d'autres peuvent servir de trame à plusieurs heures de travail avec la classe. Tous peuvent utilement contribuer aux objectifs d'apprentissage d'une démarche déductive et de maîtrise d'un vocabulaire logique adapté souhaités par le programme.*

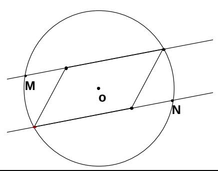
*- Ils fournissent quelques exemples montrant l'intérêt du point de vue nouveau des triangles isométriques ou de même forme ; de tels triangles sont souvent faciles à percevoir par les élèves : une fois perçus, il reste à construire la démonstration permettant de conclure. Les élèves ont par contre souvent plus de difficultés à trouver seuls "la bonne" transformation à utiliser dans un problème. Les deux points de vue (transformations/triangles isométriques ou de même forme)sont néanmoins à utiliser en complémentarité et les problèmes devront être choisis pour qu'il en soit ainsi.*

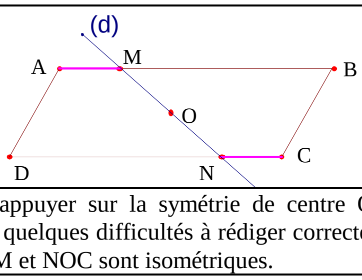
*La liste qui suit n'a aucun caractère normatif. Elle est trop longue - il importe en effet de privilégier ici la qualité et non la quantité - ; elle n'a par ailleurs aucun caractère exhaustif et les nouveaux manuels offrent de nombreuses propositions pertinentes, en particulier en matière de triangles isométriques.*

*Les énoncés ne sont pas écrits pour être utilisés directement par les élèves. La plupart s'inspirent librement de documents IREM, CRDP, Kangourou, FFJM, Rallyes, etc.*

## 1. Avec des configurations et des transformations

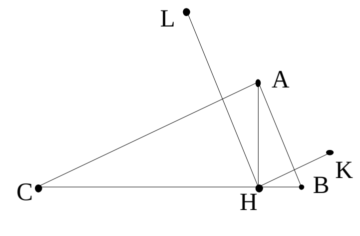
<table>
<tr><td>1.1 Le quadrilatère ABCD est quelconque ; les autres points sont des milieux de segment.<br><br>Nature de IJKL ; alignement de P, Q et R.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Commentaire : il peut être intéressant de chercher les conditions sur ABCD pour lesquelles IJKL est un losange puis un carré et travailler ainsi les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1.2 Le parallélogramme ABCD et le cercle ont même centre O.<br><br>Lien entre [MN] et le cercle.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Commentaire : cette situation peut être le prétexte pour aborder une propriété des transformations tombant sous le sens mais difficile à expliciter à savoir "l'image d'une intersection est l'intersection des images". Cette propriété s'avère utile dans de nombreux problèmes faisant intervenir une transformation ; elle ne semble pas explicitée ni utilisée au collège.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1.3 Le parallélogramme ABCD a pour centre O ; la droite (d) passe par O.<br><br>Comparer les segments [AM] et [CN].</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Commentaire : pour établir l'égalité de ces longueurs, on peut évidemment s'appuyer sur la symétrie de centre O. La démonstration repose alors sur la propriété citée en 1.2. Des élèves peuvent avoir quelques difficultés à rédiger correctement cette étape et pour eux, il peut être plus simple de démontrer que les triangles AOM et NOC sont isométriques.</td></tr>
</table>

**1.4** Le triangle ABC est rectangle en A ; [AH] est hauteur ; K et L sont symétriques de H par rapport à (AB) et (AC).

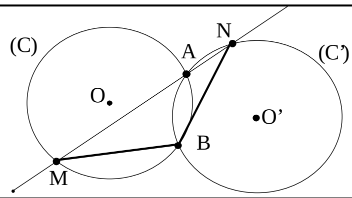
- Alignement de L, A et K ; position de A.
- Cocyclicité de A, K, B, H (resp. A, L, C, H) et position de (AC) (resp. (AB)) par rapport au cercle obtenu.
- Tangente en H au cercle de diamètre [KL].
- Tangente en A au cercle de diamètre [BC].




Commentaire : cette situation peut donner l’occasion de travailler les angles. On peut prolonger l’exercice en cherchant le rapport de similitude entre les triangles HKL et ABC

**1.5** Les deux cercles ont même rayon et se coupent en A et B. Une droite passant par A recoupe le premier cercle en M, le deuxième en N.

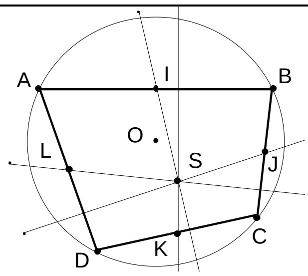
Nature du triangle BMN.




Indication : tracer la droite parallèle à (MN) passant par B, puis utiliser d'abord la symétrie de centre le milieu de [AB] puis la symétrie d'axe la médiatrice de [AM].

**1.6** Le quadrilatère ABCD est inscrit dans un cercle.
Tracer les droites passant par le milieu d'un côté et perpendiculaire au côté opposé.
Observer. Prouver.

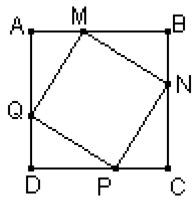
Remarque : étendre le résultat aux six droites passant par le milieu d'une corde et perpendiculaire au côté opposé.)




Indications : les médiatrices des côtés se coupent en O ; prendre la symétrie centrale de centre le centre de IJKL.

## 1. Triangles isométriques

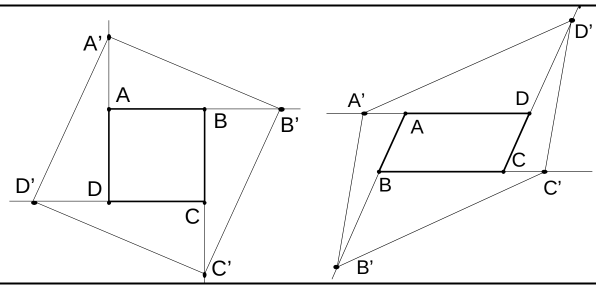
ABCD est un carré ; AM=BN=CP=DQ.
Nature du quadrilatère MNPQ.




Commentaire : on peut aussi utiliser une symétrie.

**2.2** ABCD étant un carré (un parallélogramme, …) sur les demi-droites [AB), [BC), [CD), [DA) on place les points B', C', D' et A' à une même distance d de l'origine.

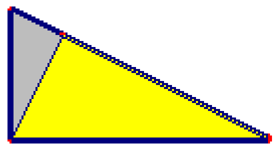
Nature du quadrilatère A'B'C'D'.




Commentaire : dans tous les cas, la symétrie de centre le centre de ABCD permet de caractériser A'B'C'D'. Cependant, il peut être plus simple pour certains élèves (voir commentaire en 1.3), d'utiliser les triangles isométriques.

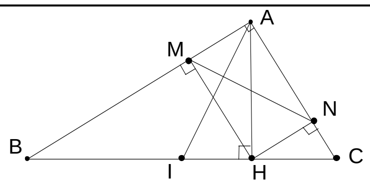
## 1. Triangles de même forme ou semblables

**3.1** Le triangle est rectangle ; on a tracé la hauteur.
Reconnaître les 3 triangles semblables ;



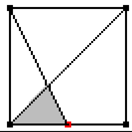
Commentaire : on peut préciser le rapport de similitude et en déduire les relations métriques (une démonstration possible du théorème de Pythagore)

**3.2** ABC est rectangle en A ; H est le pied de la hauteur ; M et N sont les projections orthogonales de H sur les côtés ; I est le milieu de BC.
Des triangles rectangles semblables ?
Hauteur et médiane du triangle AMN ?



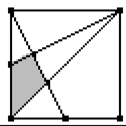

Commentaire : il y en a neuf sur dix !

**3.3** Dans le carré, on a tracé une diagonale et un segment joignant un sommet et le milieu d'un côté.
Rapport entre l'aire de la zone grisée et l'aire du carré ?



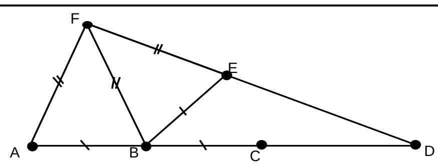
Indication : reconnaître deux triangles semblables, d'où la hauteur du triangle grisé.

**3.4** Dans le carré, on a tracé une diagonale et des segments joignant sommets et milieux de côtés.
Rapport entre l'aire de la zone grisée et l'aire du carré ?



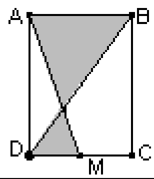
Indication : reconnaître des triangles rectangles semblables.

**3.5** On a AF = BF = EF = 5 et AB = BE = BC =3.
Est-il possible de calculer ED ?



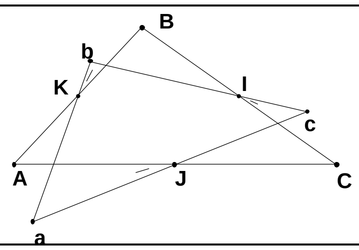

Indication : des triangles isométriques ou semblables.

**3.6** Dans le rectangle ABCD, AB = 1 et AD = 2. M est sur [DC].
Observer la variation de l'aire de la zone grisée quand M décrit [DC].
Que se passe-t-il aux extrêmes ? Quand l'aire est-elle minimale?
Expression de l'aire en fonction de *x*.
Tableau de valeurs. Valeur approchée du minimum.




Indication : les deux triangles grisés sont semblables ; rapport de similitude ; lien entre leurs hauteurs d'où hauteur du triangle supérieur en fonction de $x$ ; lien entre leurs aires ; d'où l'aire grisée vaut $(1+x^2)/(1+x)$.

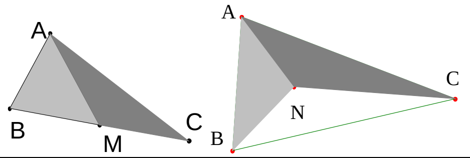
**3.7** On donne le triangle ABC de milieux respectifs I, J et K ; on fait tourner chaque droite-côté d'un même angle (dans le même sens) autour du milieu du côté : les trois droites ainsi obtenues forment un triangle abc.
Lien entre ABC et abc.
Cas particulier : ABC équilatéral et angle de 30° ou 60° ; on peut calculer le rapport de similitude.




*Prolongement* : observer avec un logiciel de géométrie dynamique (sans prouver) ce qui se passe quand l'angle change : taille de abc ; lieux de a, de b, de c ; rôle particulier du centre O de ABC.

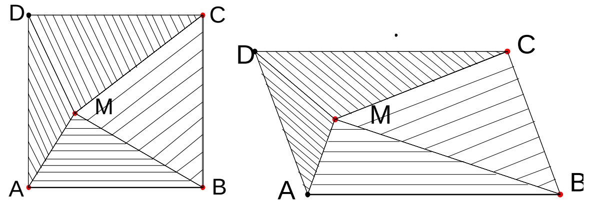
## 1. Quelques problèmes d'aires

**4.1** M est sur le segment [BC]. N est intérieur au triangle ABC.
(AM) est médiane si et seulement si les triangles AMB et AMC ont même aire.
Les triangles ANB et ANC ont même aire si et seulement si N est sur la médiane issue de A.



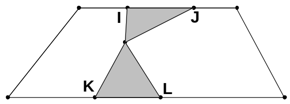

Commentaire : travail sur la double implication.

**4.2** ABCD est un carré ; M est un point à l'intérieur du carré.
Positions de M pour que les triangles AMB et BMC aient même aire.
Position de M pour que les trois aires AMCD, AMB et BMC soient égales.

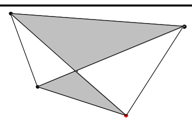



Commentaire : il y a plusieurs approches possibles ; le fait que ABCD soit un parallélogramme ne modifie pas le résultat mais certaines procédures de démonstrations peuvent ne plus être valables.

**4.3** Les points I, J K et L sont fixes sur les deux côtés parallèles du trapèze tels que IJ = KL.
Variation de la somme des aires des zones grisées quand le point M se déplace à l'intérieur du trapèze.

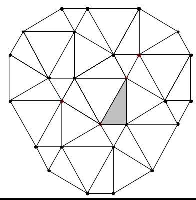



**4.4** Le produit des aires des deux zones grisées est égal au produit des aires des deux autres zones.



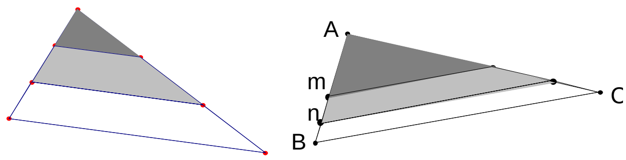
Indication : penser aux aires de triangles ayant même hauteur.

**4.5** La figure est constituée de triangles équilatéraux de trois dimensions différentes et de triangles rectangles demi-équilatéraux d'hypoténuse 4 cm.
Aire de la figure.



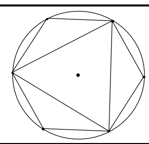
Commentaire : la réalisation de cette construction est intéressante avec l'outil informatique.

**4.6** Proportions des aires des trois régions déterminées par le partage en trois de deux des côtés d'un triangle.
Partage du triangle ABC parallèlement au côté BC en trois aires égales.
Construction "à la règle et au compas" ou avec un logiciel de géométrie dynamique.

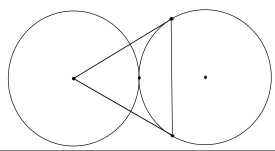


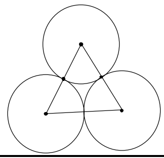

Indication : les rapports de similitude permettent de déterminer suivant quelle proportion on doit partager le côté AB ; pour la construction géométrique des points m et n, penser à la hauteur d'un triangle équilatéral de côté AB.

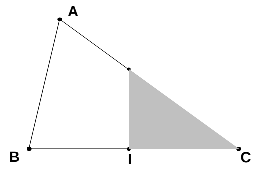
**4.7** Rapport entre les aires (respectivement les périmètres) de l'hexagone régulier et du triangle équilatéral.



**4.8** Les deux cercles ont même rayon (10 cm) et sont tangents. Les tangentes au cercle de droite se rejoignent au centre du cercle de gauche.
Aire de la zone intérieure au triangle mais extérieure aux deux cercles.



| | |
|---|---|
| **4.9** Aire du "triangle curviligne" intérieur au triangle équilatéral. |  |

| | |
|---|---|
| **4.10** Dans le triangle ABC, AB = 13, BC = 14 et CA = 15.<br>On a tracé la perpendiculaire en I à (BC).<br>Où placer I pour que les aires grisée et blanche soient égales ? |  |
| Indication : calcul de CH où H est le pied de la hauteur issue de A ; position de I ; deux triangles semblables : rapport de similitude en fonction de x = CI, équation en x. | |