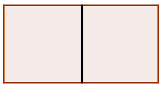
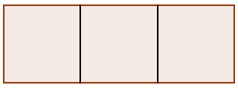
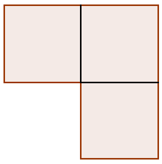
Dominos et polyminos :

Un domino est un polygone formé de deux carrés. Un polymino est constitué de n carrés juxtaposés. Il n'existe que 2 triominos (n = 3).





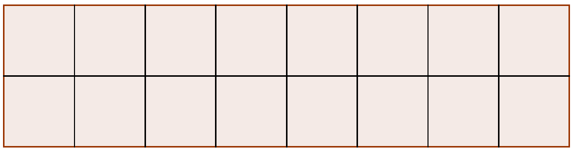


Domino Triominos

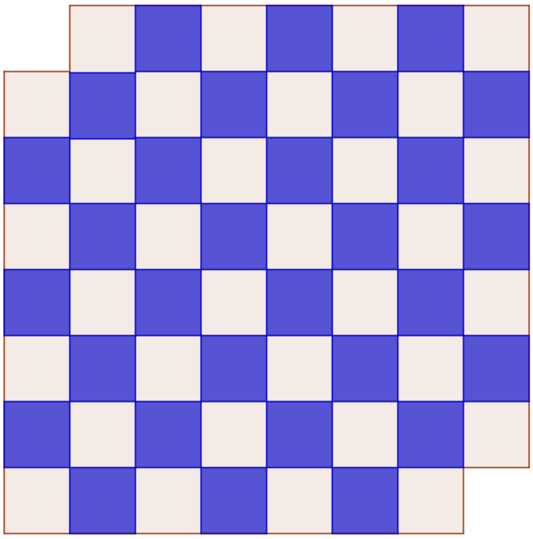
1) Combien en existe-t-il de tétraminos (n = 4) ? De pentaminos (n = 5) ?

2) On s'intéresse au pavage d'un rectangle de dimension 2 par i $(i \in \mathbb{N})$ et l'on notera A_i le nombre de façons différentes de paver ce rectangle.

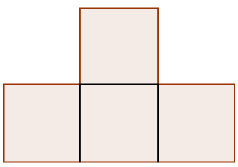
a) Déterminer A_1 , A_2 , A_3.
b) Donner, en justifiant, une relation liant A_{n+2}, A_{n+1} et A_n .
c) Déterminer le nombre de façons différentes de paver un rectangle de dimension 2 par 8.

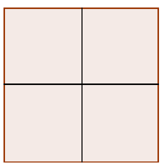


3) Prouver qu'il n'est pas possible de paver, avec des dominos, un échiquier 8×8 auquel on a enlevé deux coins opposés.



4) Prouver qu'un échiquier 8×8 ne peut pas être pavé avec 15 tétraminos en T et un tétramino carré.





tétramino en "T" *tétramino "carré"*

Eléments de correction

1) Il y a 5 tétraminos et 12 pentaminos.

2) a) $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=3$.
b) $A_{n+2}=A_{n+1}+A_n$; en effet, pour paver un rectangle de 2 par *n+2,* le premier domino (posé le plus à gauche) sera vertical ou horizontal. S'il est horizontal, il reste A_{n+1} pavages possibles et s'il est horizontal (il y en a en fait deux qui seront à l'horizontal), il reste A_n pavages possibles.
c) Avec la formule,on trouve $A_4 = 5$, $A_5 = 8$, $A_6 = 13$, $A_7 = 21$ et $A_8 = 34$.

3) Un domino couvre nécessairement une case blanche et une case noire. Il n'est donc pas possible de paver un tel échiquier car on a enlevé deux coins de même couleur.

4) Chaque tétramino en T couvre trois cases d'une couleur et une seule de l'autre alors qu'un tétramino carré couvre deux cases noires et deux cases blanches. Du fait qu'il y ait autant de cases noires que blanche et de l'imparité des tétramino en T, il n'est donc pas possible de paver l'échiquier.