Nombres d'Eisenstein

Soit a et b deux entiers relatifs, on note $q(a;b)$ le nombre a^2+ab+b^2. On dit qu'un nombre entier n est un nombre d'Eisenstein s'il existe des entiers relatifs a et b tels que $n = q(a;b)$. Les nombres d'Eisenstein ont été étudiés par le mathématicien allemand Gotthold Eisenstein (1823 -1852).
Le but de l'exercice est de déterminer certaines propriétés remarquables de ces nombres.

1. Calculer $q(0;0)$, $q(0;1)$, $q(0;2)$, $q(1;1)$, $q(1;2)$, $q(-1;1)$ et $q(-1;2)$.

2. Montrer que 49 et 91 sont des nombres d'Eisenstein.

3. Montrer que si m est un entier, alors m^2 et $3m^2$ sont des nombres d'Eisenstein.

4. Montrer que si n est un nombre d'Eisenstein, alors $4n$ est aussi un nombre d'Eisenstein.

5. Vérifier l'égalité $a^2 + ab + b^2 = \frac{(2a+b)^2+3b^2}{4}$.
- En déduire que tous les nombres d'Eisenstein sont positifs.
- Montrer que 2 n'est pas un nombre d'Eisenstein.

6. Ecrire et justifier un algorithme qui détermine tous les nombres d'Eisenstein entre 0 et n.
   Appliquer cet algorithme pour obtenir la liste des nombres d'Eisenstein entre 0 et 25.

7. Montrer que si n est un entier alors $3n$-1 n'est pas un nombre d'Eisenstein.

8. Soit a, b, c et d quatre nombres entiers. En considérant $q(ac+bc+bd\ ;\ ad-bc)$, montrer que le produit de deux nombres d'Eisenstein est un nombre d'Eisenstein.

9. Montrer que si n est un multiple de 9, alors n est un nombre d'Eisenstein si et seulement si $n/3$ l'est.

Nombres d'Eisenstein – Eléments de correction

1. Calculer $q(0;0)$, $q(0;1)$, $q(0;2)$, $q(1;1)$, $q(1;2)$, $q(-1;1)$ et $q(-1;2)$.

$q(0;0) = 0$, $q(0;1) = 1$, $q(0;2) = 4$, $q(1;1) = 3$,
$q(1;2) = 7$ $q(-1;1) = 1$, $q(1;2) = 3$.

2. Montrer que 49 et 91 sont des nombres d'Eisenstein.

$49 = q(7; 0) = q(5; 3)$
$91 = q(10;\ \ 1)$

3. Montrer que si m est un entier, alors m^2 et $3m^2$ sont des nombres d'Eisenstein.

$m^2 = q(m; 0)$ et $3m^2 = q(m;m)$.

4. Montrer que si n est un nombre d'Eisenstein, alors $4n$ est aussi un nombre d'Eisenstein.

Si $n = q(a; b)$, alors $4n = q(2a; 2b)$.

5. Vérifier l'égalité $a^2 + ab + b^2 = \frac{(2a+b)^2+3b^2}{4}$.
- En déduire que tous les nombres d'Eisenstein sont positifs.
- Montrer que 2 n'est pas un nombre d'Eisenstein.

- Comme somme de nombres positifs, $q(a; b)$ est toujours un nombre positif.
- D'autre part, si $q(a; b) = 2$, alors $(2a+b)^2+3b^2 = 8$, donc $b^2 < 3$, d'où $b^2 = 0$ ou $b^2 = 1$

soit $b = 0$, et alors $q(a; b) = 2$ implique $a^2 = 2$, impossible car a est un entier.
Soit $b^2 = 1$, et alors $q(a; b) = 2$ implique $(2a + b)^2 = 5$, impossible puisque $2a+b$ est un entier.

6. Ecrire et justifier un algorithme qui détermine tous les nombres d'Eisenstein entre 0 et n.
Appliquer cet algorithme pour obtenir la liste des nombres d'Eisenstein entre 0 et 25.

Par exemple :

```
pour b entre 0 et √(4n/3)
  pour a entre −b et −b + √n
    si q(a, b) n'est pas dans la liste et q(a, b) ≤ n, alors
      ajouter q(a, b) à la liste
    fin si
  fin pour
fin pour
retourner liste
```

On obtient 0; 1; 3; 4; 7; 12; 13; 16; 19; 21.

7. Montrer que si n est un entier alors $3n$-1 n'est pas un nombre d'Eisenstein.

On écrit $a = 3p+r$ et $b = 3q +s$ avec $r; s = 0; 1$ ou 2.
Les valeurs de r et s donnent 9 cas,
et dans les 9 cas, on vérifie que $q(a; b)$ est de la forme $3u + v$ avec $v = 0$ ou 1.

8. Soit a, b, c et d quatre nombres entiers. En considérant $q(ac+bc+bd ; ad-bc)$, montrer que le produit de deux nombres d'Eisenstein est un nombre d'Eisenstein.

Un calcul montre que $q(ac + bc + bd; ad - bc) = q(a; b)\mathrm{x}q(c; d)$.

9. Montrer que si n est un multiple de 9, alors n est un nombre d'Eisenstein si et seulement si $n/3$ l'est.

Si $n = q(a; b)$ est divisible par 3, alors :
- soit a et b sont divisibles par 3, et alors $n/9 = q(a/3; b/3)$,
- soit a et b sont tous les deux non divisibles par 9.

En regardant les 4 possibilités pour r et s (question 7), on voit qu'on doit avoir $r = s$.
Alors $q(3p+1; 3q+1) = 9(p^2+pq+q^2+p+q)+3$ qui n'est pas divisible par 9,
et $q(3p + 2; 3q + 2) = 9(p^2 + pq + q^2 + 2p + 2q) + 12$ qui n'est pas non plus divisible par 9.