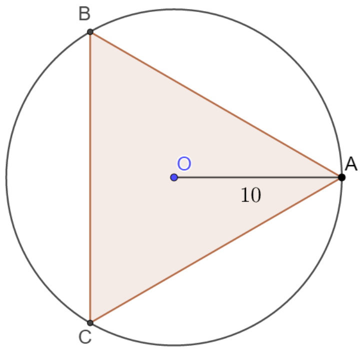
Les clôtures

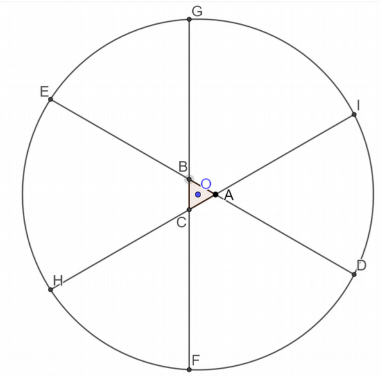
Partie A



L'enclos d'Eléonore est composé d'un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de rayon 10 mètres.
Mathias se trouve à l'intérieur du disque.
On admet que la probabilité que Mathias se trouve dans une partie du disque est égale à l'aire de cette partie divisée par l'aire du disque.

1. Quelle est la hauteur du triangle ABC ?
2. Quelle est la probabilité que Mathias puisse voir les trois clôtures de l'enclos (une clôture empêche de voir de l'autre côté) ?
3. Quelle est la probabilité que Mathias ne puisse voir qu'une seule des trois clôtures de l'enclos ?

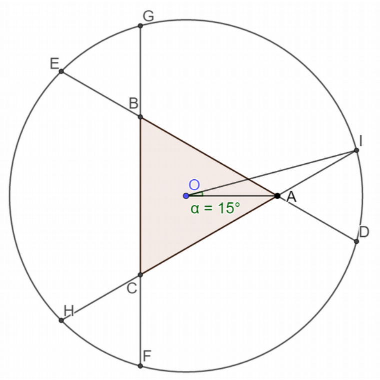
Partie B



L'enclos de Fanny est composé d'un triangle équilatéral ABC de côté $10\sqrt{3}$ mètres et dont l'orthocentre est situé au centre d'un cercle de rayon beaucoup plus grand.

1. Lorsque le rayon devient très grand, que peut-on dire de la probabilité pour Mathias de voir trois clôtures ?
2. Lorsque le rayon devient très grand, que peut-on dire de la probabilité pour Mathias de voir deux clôtures ?
3. Lorsque le rayon devient très grand, que peut-on dire de la probabilité pour Mathias de voir une seule clôture ?

Partie C



L'enclos de Gertrude est composé d'un triangle équilatéral ABC de côté $10\sqrt{3}$ mètres et dont l'orthocentre est situé au centre d'un cercle tel que l'angle $\widehat{AOI}$ mesure 15°.

Dans toute la suite, on pourra utiliser que $\cos(15^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, que $\sin(15^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et que $\tan(15^\circ)=2-\sqrt{3}$

1. Déterminer la probabilité que Mathias voit 3 clôtures.
2. Déterminer la probabilité que Mathias voit 2 clôtures.
3. Déterminer la probabilité que Mathias voit une seule clôture.

Éléments de correction.

Partie A

1. Dans un triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit est confondu avec le centre de gravité, situé aux deux tiers de la médiane donc la hauteur du triangle ABC est 15.
2. Dans le triangle OHC rectangle en H, à l'aide du théorème de Pythagore ou de la trigonométrie, on obtient que le côté du triangle ABC est $10\sqrt{3}$ et que l'aire du triangle est $75\sqrt{3}$.

L'aire du disque est $\pi\times 10^2=100\pi$ donc la probabilité demandée est $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

3. la probabilité demandée est $1-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Partie B

1. Si le rayon devient très grand devant le côté du triangle, la probabilité demandée se rapproche de 0.
2. Si le rayon devient très grand devant le côté du triangle, la probabilité demandée se rapproche de $\frac{1}{2}$ (le triangle HCF se rapproche du triangle HOF).
3. $\frac{1}{2}$.

Partie C

1. D'après la partie A, OA = 10 et l'aire du triangle ABC est $75\sqrt{3}$.

D'après les angles, le triangle OAI est isocèle en A, de hauteur (issue de A) 10sin(15°) et de base 20cos(15°) donc le rayon du cercle est 20cos(15°) et son aire est

$\pi\times 20^2\times\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=100\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$ donc $p_3=\frac{6\sqrt{3}-9}{4\pi}$

2. L'arc OID a pour aire $\frac{\pi}{12}\times \mathrm{OI}^2=\frac{\pi}{12}\times 400\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{25\pi\left(2+\sqrt{3}\right)}{3}$.

Le triangle OID a pour aire $\frac{200\cos\left(15^\circ\right)\sin\left(15^\circ\right)}{2}=50\sin\left(30^\circ\right)=25$.

donc l'aire du morceau OID est $\frac{25\pi\left(2+\sqrt{3}\right)}{3}-50$ et $p_2=\frac{25\pi\left(2+\sqrt{3}\right)-150}{100\pi\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{4}-\frac{6-3\sqrt{3}}{2\pi}$

3. Par différence, $p_1=1-\frac{6\sqrt{3}-9}{4\pi}-\frac{1}{4}+\frac{6-3\sqrt{3}}{2\pi}=\frac{3}{4}+\frac{21}{2\pi}$