Académique 1 (candidats de la serie S)

A la recherche d'une valeur approchée de π

Une rédaction possible

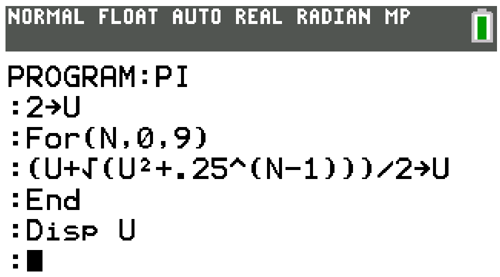
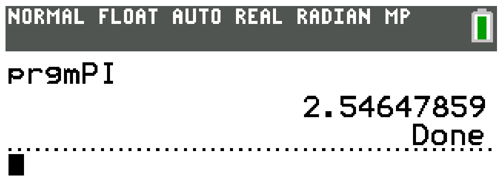
Partie A

En appliquant le théorème de Pythagore, on peut écrire : $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=\left(\mathrm{AB}^2+\mathrm{AH}^2\right)+\left(\mathrm{AC}^2+\mathrm{AH}^2\right)$.
Donc $\mathrm{BC}^2=(\mathrm{BA}+\mathrm{AC})^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+2\,\mathrm{AH}^2$donc $\mathrm{BA}^2+2\mathrm{BA}\times\mathrm{AC}+\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+2\,\mathrm{AH}^2$.
Après simplification : $\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}$.

Partie B

1. La propriété des milieux dans le triangle $\mathrm{A}_0\mathrm{EB}_0$ donne $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1=\frac{1}{2}\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$.
   Donc $16\,\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1=4\,\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0=16$.
2. Le triangle OA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}et H_{n+1} est le pied de la hauteur issue de A_{n+1}.
   La propriété démontrée en A donne le résultat.
3. Le théorème des milieux donne $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n$. La suite de terme général $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2. Donc $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2^n}$.
4. H_{n+1} est le milieu de $[\mathrm{EH}_n]$, on remplace dans le résultat du 2.
   EH_{n+1} par $\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}$ et on obtient alors $r_{n+1}(r_{n+1}-r_n)=\left(\frac{1}{2^n}\right)^2=\frac{1}{4^n}$, d'où le résultat.
5. On résout l'équation du second degré d'inconnue r_{n+1}. $\Delta=r_n{}^2-4\times\left(-\frac{1^n}{4}\right)=r_n^2+\frac{1}{4^{n-1}}$.

   Et donc $r_{n+1}=\dfrac{r_n+\sqrt{r_n^2+\frac{1}{4^{n-1}}}}{2}$.
6.

Variables	U est un réel, N un entier	
Initialisation	U prend la valeur 2	
Traitement	Pour N allant de 0 à 9 Faire	
	U prend la valeur de $\dfrac{U+\sqrt{U^2+\frac{1}{4^{N-1}}}}{2}$	
	Fin Pour	
Sortie	Afficher U	

On obtient $r_{10}\approx 2{,}546479$.

7. Lorsque *n* augmente indéfiniment, le polygone est de « plus en plus proche » du cercle de centre O et de rayon r_n. En comparant les périmètres on obtient $2\pi r_n \approx 16$ donc $\pi \approx \frac{8}{r_n}$.

$\pi \approx \frac{8}{r_{10}}$ donc $\pi \approx \frac{8}{2{,}54647859} \approx 3{,}141593$.