OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION DE 2002

CLASSE DE PREMIÈRE **DURÉE : 4 heures**

Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

EXERCICE 1 :

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.

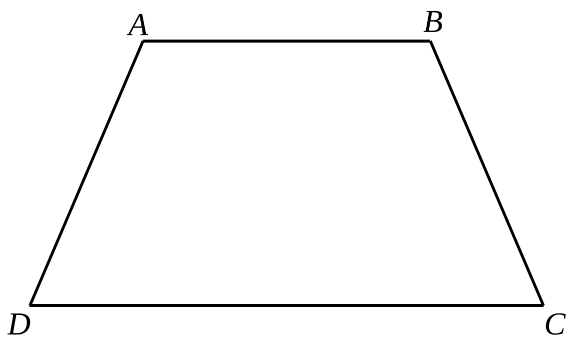
La dernière fourmi décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission étant accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.

Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

EXERCICE 2 :

$ABCD$ désigne un trapèze ; $[AB]$ est parallèle à $[CD]$, $AB = BC = AD = 5$ cm et $CD > AB$.

Pour quelle longueur CD l'aire du trapèze $ABCD$ est-elle maximale ?



On rappelle que l'aire **A** d'un trapèze est donnée par la formule **A** $= \dfrac{(L + l)\times h}{2}$ où L est la longueur de la grande base, l la longueur de la petite base et h la hauteur du trapèze.

EXERCICE 3 :

10 personnes sont assises autour d'une table ronde.

10 jetons portant les numéros de 1 à 10 sont distribués au hasard à ces 10 personnes.

Chaque personne gagne une somme égale en euros au total du numéro de son propre jeton, de celui de son voisin de gauche et de celui de son voisin de droite.

1 - À l'aide d'un procédé aléatoire de votre choix, donner un exemple de répartition des jetons. Sur cet exemple, indiquer le gain de chaque personne et la moyenne de ces dix gains.

2 - Prouver que, quelle que soit la répartition des jetons, au moins une des dix personnes aura un gain supérieur ou égal à 17 **.**

3 - Donner un exemple où tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18.

4 - Peut-on, dans la deuxième question, remplacer 17 par 18 ?

EXERCICE 4 :

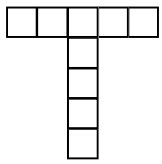
On dispose :

- d'un damier carré formé de 10×10 petits carrés identiques.
- d'une pièce d'un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un côté 9 petits carrés identiques à ceux du damier.

Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce sur le damier en respectant les règles suivantes :

- chaque exemplaire peut être tourné ou retourné.
- chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier.
- deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.

1 - Dessiner l'une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-contre :



2 - Montrer que, **quelle que soit** la forme de la pièce de départ, il est possible de poser **deux** exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci-dessus.

3 - Peut-on, dans la question précédente, remplacer deux par trois, par quatre, par cinq, etc… ?