

# Ressources pédagogiques pour l'enseignement des Mathématiques en série STD2A

---

## Photo et tableur

### Thème

Découvrir et manipuler des images en niveaux de gris

### Situation d'accroche

Comment est structurée une image numérique ?

### Documents supports

Photographies

### Domaines

Fonctions de référence

Équations

### Capacités

Manipuler des formules et des fonctions dans un tableur

Niveau Terminale : écrire une équation cartésienne d'un cercle, d'une ellipse.

### Prérequis

Activités « Cube des couleurs » et « Nuances de gris »

### Outils

Tableur (le tableur Excel 2007 offrant un contexte plus commode)

Logiciel de traitement d'images (XnView, ACDSee™, The Gimp, Photoshop™ ou analogue).

### Auteurs

R. Cabane, L. Degraeve

### Crédits

Les illustrations figurant dans cette ressource sont issues des logiciels proposés et sont libres de droits.

# Photo et tableur

## 1. Contexte

L'universalité des images dans notre environnement justifie une étude de celles-ci en lien avec les programmes de Mathématiques et de Sciences Physiques.

Les notions abordées dans cette ressource figurent à la fois dans le programme de Mathématiques et dans le programme de Sciences Physiques et Chimiques de la série STD2A (BOEN spécial n°3 du 17 mars 2011), consultables aux adresses suivantes :

[http://media.education.gouv.fr/file/special\\_3\\_MEN/04/1/phys\\_chimie\\_ST2A\\_171041.pdf](http://media.education.gouv.fr/file/special_3_MEN/04/1/phys_chimie_ST2A_171041.pdf)

[http://media.education.gouv.fr/file/special\\_3\\_MEN/03/5/maths\\_STD2A\\_171035.pdf](http://media.education.gouv.fr/file/special_3_MEN/03/5/maths_STD2A_171035.pdf)

Au titre de l'image numérique, le programme de physique met en avant les capacités suivantes :

- Distinguer luminosité et contraste d'une image.
- Définir le pixel. Exemple de l'appareil photo numérique.
- Expliquer le principe du codage en niveaux de gris et en couleurs RVB.
- Distinguer définition et résolution d'une image numérique ; illustrer par des exemples.
- Réaliser des images à l'aide d'un APN. Commenter leurs caractéristiques et les histogrammes associés.

Pour ce qui concerne les Mathématiques, on retiendra surtout l'étude de la fonction « racine carrée » ainsi qu'une révision de nombreuses notions figurant dans les programmes des classes antérieures :

- Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées.
- Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.
- Utiliser les fonctions du tableur.

## 2. Les images matricielles (bitmap) : images et systèmes de coordonnées

Une image numérique matricielle<sup>1</sup> est essentiellement un ensemble de points (nommés *pixels*, abréviation de l'expression anglaise *picture elements*), organisés en un rectangle, chacun de ces points étant pourvu d'une « couleur » qui peut être un niveau de gris, une combinaison d'intensités lumineuses en rouge, vert et bleu ou simplement du noir ou blanc. Pour simplifier l'étude, nous nous limiterons aux images en niveaux de gris (improprement nommées « en noir et blanc »).

On peut comparer l'image matricielle à une feuille de papier quadrillé où l'on écrit, comme il est d'usage, de gauche à droite et de haut en bas, et où on mettrait une lettre (caractère) dans chaque case (ou *pixel*). La lettre inscrite dans la case permet alors d'en définir le coloriage<sup>2</sup>. La comparaison avec un rectangle du plan euclidien est également possible mais moins appropriée car l'image est discrète (et non continue) et surtout elle est rangée par lignes, parcourues de gauche à droite et de haut en bas (et non de bas en haut).

Les points de l'image sont donc repérés par des coordonnées entières. Dans cette activité nous nous intéresserons aux images en niveaux de gris, avec pratiquement  $256=2^8$  niveaux différents possibles (allant du noir au blanc) ; on se reportera à l'activité « Nuances de gris » pour plus de détails. Pour simplifier, nous travaillerons avec des images carrées de faible dimension<sup>3</sup> (de côté 128 ou 256 pixels).

---

1 En anglais : bitmap = « carte de bits »

2 On pourra confronter ce principe avec l'œuvre *Do it yourself (Seascape)* d'Andy Warhol (Museum für Gegenwart, Marxsammlung, Berlin).

3 Des « vignettes » ou « icônes » en quelque sorte.

### 3. Image et tableur

Les caractéristiques qui viennent d'être données font immédiatement penser au tableur qui est effectivement un outil relativement simple sous réserve de se limiter à des images de petite taille. Pour accéder aux coordonnées des points on dispose des fonctions `LIGNE()` et `COLONNE()`.<sup>4</sup>

#### a) Approche directe

Une première approche va consister à créer une image très simple comme un dégradé et à visualiser directement cette image en associant la couleur d'arrière-plan de la cellule à la valeur de la cellule elle-même, ce qui nécessite le tableur Excel 2007 ou ultérieur.<sup>5</sup>

On crée un tableau carré d'entiers tous compris entre 0 et 255, en répartissant régulièrement ces valeurs (à partir d'un motif de départ ou d'une formule).

Ici on a utilisé la formule  $= (\text{LIGNE}() + \text{COLONNE}() - 6) * 6$  qui a été recopiée sur 24 lignes et colonnes. Les quatre premières lignes ont été laissées vierges, on expliquera plus loin pourquoi.

Ce tableau de calcul est aussi une image !

On utilise alors la mise en forme conditionnelle (nuance de couleur/autres règles), en choisissant la couleur noire pour les valeurs minimales (0) et la couleur blanche pour les valeurs maximales (255).

On obtient le même tableau alors colorié en niveau de gris, ce qui donne une bonne idée de l'association entre les coordonnées des points et les valeurs des pixels (ci-contre).

Il est à ce stade utile de laisser les élèves manipuler le tableur par eux-mêmes afin qu'ils s'approprient le concept, l'expérience la plus simple consistant à entrer des valeurs « à la main » et à assister à la modification de la teinte d'arrière-plan de la cellule. La formule la plus simple que les élèves pourraient disposer dans les cellules est `=COLONNE()`, ce qui va créer un dégradé horizontal (on peut aussi créer le même effet en faisant du remplissage par progression arithmétique).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
5	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
7	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
8	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126
9	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
10	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
11	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144
12	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150
13	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156
14	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162
15	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168
16	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174
17	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
18	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186
19	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192
20	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198
21	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204
22	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210
23	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216
24	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	222
25	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	222	228
26	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	222	228	234

<sup>4</sup> Avec une adaptation qu'il conviendra de bien expliquer aux élèves : les « coordonnées » des cellules commencent à 1 (et non 0) et l'axe vertical y est orienté « vers le bas ».

<sup>5</sup> Les autres tableurs en usage (OpenOffice.org, Libreoffice, Gnumeric) n'offrent pas ce mécanisme et obligent à créer des styles puis à recourir à la fonction `STYLE()`.

Ce temps « manipulateur » est important pour développer chez les élèves une bonne intuition de la notion d'image numérique.

Une variante de ce travail consiste à présenter aux élèves une feuille de calcul déjà remplie et à leur faire deviner la formule ayant servi au remplissage (ce travail pouvant être proposé en devoir à la maison avec un support papier).

## b) Exploitation

Le tableau des valeurs des pixels peut servir de base pour faire un peu de traitement d'image.

À cet effet, il est bon de nommer la zone correspondant aux points de l'image (ici on a nommé  $P_{ix}$  la zone, ou plage, A5:T28) ; ainsi, au lieu de devoir manipuler des formules de tableur (peu parlantes) on peut utiliser le nom de la zone.

On peut alors, à titre d'exemple, construire dans une nouvelle feuille (onglet) un tableau en utilisant la formule suivante :

=ENT(RACINE( $P_{ix}/255$ )\*255)

On obtient ainsi le résultat présenté ci-contre.

Les élèves peuvent alors comparer le dégradé initial avec le dégradé éclairci.

L'explication (éclaircissement de l'image) est donnée dans l'activité « Nuances de gris ».

On pourra à cette occasion faire tester les autres transformations proposées dans l'activité mentionnée.

5	0	39	95	67	78	87	95	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250
6	39	55	67	78	87	95	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250	
7	55	67	78	87	95	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250		
8	67	78	87	95	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250			
9	78	87	95	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250				
10	87	95	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250					
11	95	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250						
12	103	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250							
13	110	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250								
14	117	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250									
15	123	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250										
16	129	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250											
17	135	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250												
18	141	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250													
19	146	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250														
20	151	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250															
21	156	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																
22	161	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																	
23	165	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																		
24	170	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																			
25	174	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																				
26	179	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																					
27	183	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																						
28	187	191	195	199	203	206	210	214	217	221	224	228	231	234	237	241	244	247	250																							

c) Conservation en fichiers-image (un peu plus technique)

Il est possible d'exporter une image à partir du tableur afin d'obtenir un fichier indépendant qui pourra être traité par les outils dédiés.

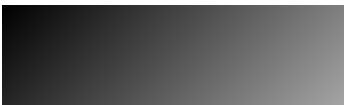
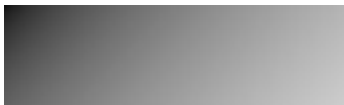
Pour ce faire, on remplit les quatre premières lignes (précédemment ignorées) exactement comme indiqué ci-dessous (on prendra soin de bien mettre en place les informations relatives à la taille de l'image).

Diagram illustrating the structure of a table with 12 rows and 8 columns. The first two rows are headers. The first column (A) contains the identifier 'P2' and a comment '#'. The second column (B) contains the values '128' and '255', which are labeled 'Largeur' and 'Hauteur' respectively. The third column (C) contains the value '128', which is labeled 'Valeur maxi'. The remaining columns (D-H) contain numerical data.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P2							
2	#							
3		128	128					
4		255						
5		1	2	3	4	6	7	8
6		2	3	4	5	7	8	9
7		3	4	5	6	8	9	10
8		4	5	6	7	9	10	11
9		5	6	7	8	10	11	12
10		6	7	8	9	11	12	13
11		7	8	9	10	12	13	14
12		8	9	10	11	13	14	15

On enregistre alors la feuille de calcul au format texte CSV (.csv), **en choisissant l'espace comme séparateur de champs (et non le point virgule). On choisit également la suppression des séparateurs de texte** (pas d'apostrophes). On renomme ensuite le fichier obtenu en modifiant l'extension : on passe ainsi du format texte CSV (.csv) au format d'image PGM (.pgm). Ce format peut être ouvert à l'aide de logiciels de traitement d'image comme *The Gimp* ou *XnView*. Bref, le contenu de la feuille de calcul peut être interprété comme une image **et affiché en tant que telle**.

C'est ainsi que l'on peut obtenir, par exportation, le dégradé suivant ainsi que le dégradé « éclairci » :

<i>Dégradé initial</i>	<i>Dégradé éclairci</i>
	

L'ensemble de cette démarche représente un travail sans doute trop long pour être pratiqué en classe par les élèves, à moins de les aider, par exemple en fournissant un tableau prérempli et en automatisant quelque peu le processus de renommage du fichier.

#### d) Importation d'images (nettement plus technique)

Le professeur peut, préalablement au travail de l'élève, importer une image dans le tableur plutôt que de travailler sur un simple dégradé. Le travail sur des photos ou images réelles est beaucoup plus motivant pour l'élève car plus concret (cela le rapproche de l'univers qui est le sien).

Pour cela, on choisit une photo quelconque. Dans *XnView* (ou logiciel similaire), on effectue une conversion en niveaux de gris, puis une sélection de zone carrée et enfin une mise à l'échelle pour obtenir un format « vignette » 128x128 en niveaux de gris. On enregistre alors l'image au format PGM préalablement réglé en ASCII (et non en binaire), et on renomme le fichier en remplaçant l'extension .pgm par .csv ; enfin, on importe cette image dans le tableur.

Malheureusement, l'image est souvent représentée par une seule grande colonne (ligne 5 et suivantes) ou une seule grande ligne. On nomme alors par exemple "Pix" la zone contenant les lignes de pixels (lignes 5 à 16388). Il faut maintenant créer une nouvelle feuille, par exemple "Pixels", y copier soigneusement les 4 premières lignes de la première feuille. En utilisant la formule

$$=INDEX(Pix; (LIGNE() - 5) * 128 + COLONNE())$$

sur 128 lignes et 128 colonnes, on rétablit la structure de l'image en lignes et colonnes.

On dispose alors du document sur lequel les élèves pourront travailler. Une variante est présentée en annexe.

### 4. Quelques applications

#### a) Halos circulaires

On peut maintenant créer une image en niveaux de gris dans laquelle la « couleur » dépend de la distance entre le point à colorier et le centre de l'image ; le résultat sera formé de couronnes circulaires de teintes progressives :

Le remplissage s'est fait en assignant au pixel de coordonnées  $(x; y)$  le niveau de gris  $E \left( N \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right)$ ,  $(x_0; y_0)$  désignant les coordonnées du centre et  $N$  un facteur de normalisation assurant que les niveaux de gris ne dépassent pas 255 (tout en s'en approchant). Ici on a pris comme centre le point de coordonnées  $(65; 65)$ <sup>6</sup> et le facteur de normalisation  $2\sqrt{2}$  qui convient bien. En fin de compte, on a rempli le tableau avec la formule :

$$=ENT(2,82 * RACINE((LIGNE() - 69)^2 + (COLONNE() - 65)^2))$$

Cette formule étant un peu complexe à mettre au point, il est préférable de partir de l'image du halo ci-dessus et de faire retrouver le lien entre niveau de gris et distance au centre.<sup>7</sup> Il est à ce point intéressant de demander aux élèves comment sont organisés les pixels de même teinte ; on pourra ainsi introduire très naturellement les équations de cercle (qui figurent au programme de la classe terminale).


Le « halo » précédent évoque l'éclairement d'une surface plane par une source lumineuse ; passer l'image en négatif ne suffit cependant pas pour obtenir un halo satisfaisant. Un peu de physique fait voir que la « teinte » devrait dépendre de la puissance  $-3/2$  de la somme du carré de la distance précitée et d'une constante, ce qui donne le halo ci-contre, nettement plus convaincant.

#### b) Halos elliptiques (classe terminale)

<sup>6</sup> Les coordonnées des « points » étant ici comprises entre 1 et 128, le « vrai » milieu aurait pour coordonnées  $(64,5; 64,5)$  que nous arrondissons à  $(65; 65)$  ; la formule de remplissage fait apparaître le nombre 69 parce qu'il y a quatre lignes d'en-tête au-dessus de la zone d'image.

<sup>7</sup> On peut d'ailleurs calculer la constante  $N$  connaissant la taille de l'image, les coordonnées du centre et les niveaux de gris assignés au centre et au coin le plus éloigné du centre.





### c) Photo numérique et traitement d'images

Il est recommandé de conduire ces expérimentations autour du traitement d'image en lien avec l'enseignant en design et arts appliqués et dans une perspective essentiellement culturelle.

[illegible][illegible]

Pour reprendre notre expérimentation, on crée donc un nouveau tableau (ou feuille) avec une formule du type

dûment recopiée à droite et en bas ; l'effet de flou est ici modéré, il serait plus fort avec d'autres pondérations voire des moyennes sur des « voisinages » plus larges du pixel initial.

Il est intéressant de faire découvrir aux élèves que ce type de formule<sup>8</sup> respecte l'intervalle de valeurs [0;255] et ne crée pas de valeurs extrêmes 0 (noir) ou 255 (blanc) à moins d'être appliquée sur des zones déjà noires ou blanches. On peut même se demander dans quelles conditions l'on aurait un écart maximum<sup>9</sup> entre le pixel initial et le pixel flou ; cela se produit sur les « pixels chauds », points blancs (resp. noirs) isolés dans une plage noire (resp. blanche), typiques d'images bruitées ou parasitées.

## 5. Annexe

Le logiciel libre Image Magick (<http://www.imagemagick.org/script/index.php>) permet de convertir directement dans le format PGM réglé en ASCII. Une fois le logiciel installé, il faut ouvrir une boîte à commandes. La commande suivante donne le résultat :

```
convert -compress none image.png image.pgm
```

*On trouvera plus de détails ici : <http://www.imagemagick.org/Usage/formats/#pbmplus>*

---

<sup>8</sup> Formule barycentrique, de fait

<sup>9</sup> Cet écart maximum est de 128.