Ressources pédagogiques pour l'enseignement des Mathématiques en série STD2A

Arcs en architecture

Thème

Analyse d'un élément architectural

Situation d'accroche

Comment la géométrie intervient-elle en architecture ?

Domaine

Raccordement de deux courbes

Compétences

Analyser un document, engager une démarche

Capacités

Traiter des situations simples de raccordement de deux courbes
Calculer des angles et des longueurs

Outils

Logiciel de géométrie dynamique

Références

http://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_(architecture)
http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/compas.pdf
http://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_%28architecture%29
http://fr.wikisource.org/wiki/Dictionnaire_raisonné_de_l'architecture_française_du_XIe_au_XVIe_siècle_-_Tome_3,_Cloître
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Cloitre.Saint.Trophyme.Arles.2.png
http://numerique.bibliotheque.bm-lille.fr/sdx/num/album_S-2_2/S-2_2_072___.jpg

Bibliographie

Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI^e^ au XVI^e^ siècle

Auteurs

Ludovic Degraeve, Jean-Marc Duquesnoy
Les photographies ont été réalisées par les auteurs ainsi que par Robert Cabane, sauf celles de l'hôtel de Mirman qui sont adaptée du matériel photographie du service régional de l'inventaire des Bâtiments de France.

Arcs en architecture

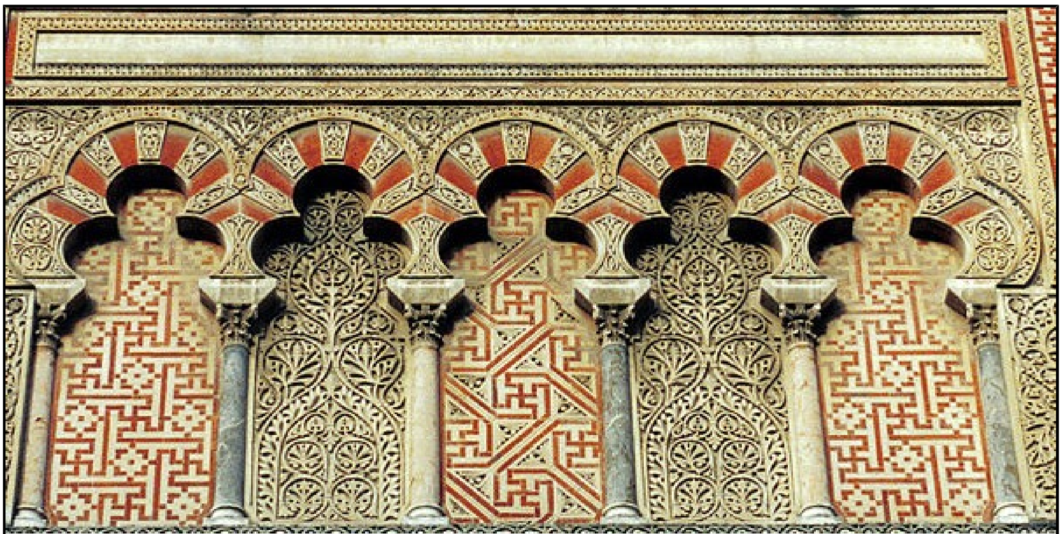
1. Introduction

Les arcs sont l'une des formes architecturales les plus anciennes au monde, introduits dès l'invention de la voûte et constamment perfectionnés au cours des siècles. Géométriquement, qu'ils soient romans, gothiques ou arabes, les arcs reposent tous sur des formes circulaires plus ou moins complexes et le plus souvent agencées suivant des procédés de construction précis.

Cette activité propose de découvrir trois formes d'arcs complexes, et aboutissant à des problèmes de raccordement de courbes autres que des cercles.

2. Les arcs trilobés

Nous partirons d'une photo de l'une des portes de la façade Est de la mosquée-cathédrale de Cordoue. Les arcs qui apparaissent sont « trilobés » c'est-à-dire formés de trois « feuilles » ou « lobes ».



Mosquée-cathédrale de Cordoue

a) Étape 1

Objectif pour la classe : établir le programme de construction géométrique d'un arc trilobé.

Déroulement de la séance: au vidéoprojecteur (ou à partir d'une reproduction sur papier) et en dialogue avec la classe.

Durée de la séance: une heure.

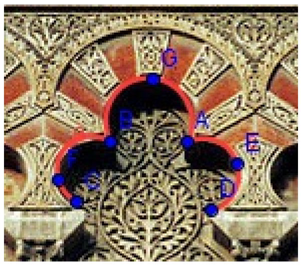
On commence par analyser la photographie, afin d'amener les élèves à une série de constatations :

- On a trois arcs de cercle pour chaque arche.
- Ces arcs ont pour centre les sommets d'un triangle.

Questions qui peuvent se poser:

- Quelle est la nature du triangle formé par les centres des trois arcs?
- Quelle est la position des tangentes à deux arcs en leur point de contact?

Si l'on a accès à des ordinateurs, on peut conduire la suite de l'activité avec le logiciel Geogebra. Dans un premier temps, l'insertion de l'image dans une feuille GeoGebra permet de faire apparaître la scène à traiter, des points caractéristiques, puis des arcs de cercle. Dans un deuxième temps, on détermine la position des trois centres.[1]

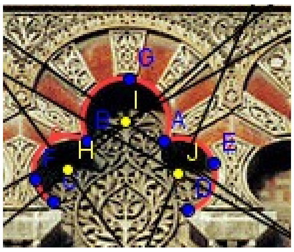


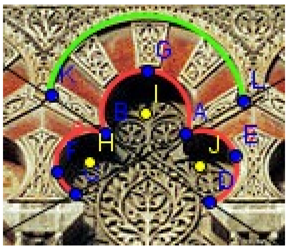
Si on travaille sur papier, il faut un support assez grand pour que les tracés à la règle et au compas soient précis.

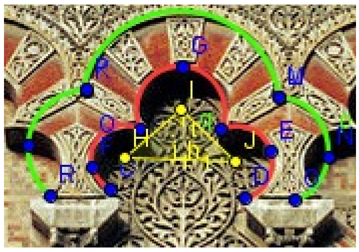
Quoi qu'il en soit, la première question à aborder (niveau Collège) est celle-ci :

comment déterminer le centre d'un cercle lorsque l'on connait trois points de ce cercle ?

On amène alors les élèves à déterminer l'intersection de deux des médiatrices définies par les trois points d'un des arcs de cercle. On réitère le procédé pour les deux autres arcs, puis on trace les trois arcs supérieurs.







b) Étape 2

Déroulement de la séance : en salle pupitre

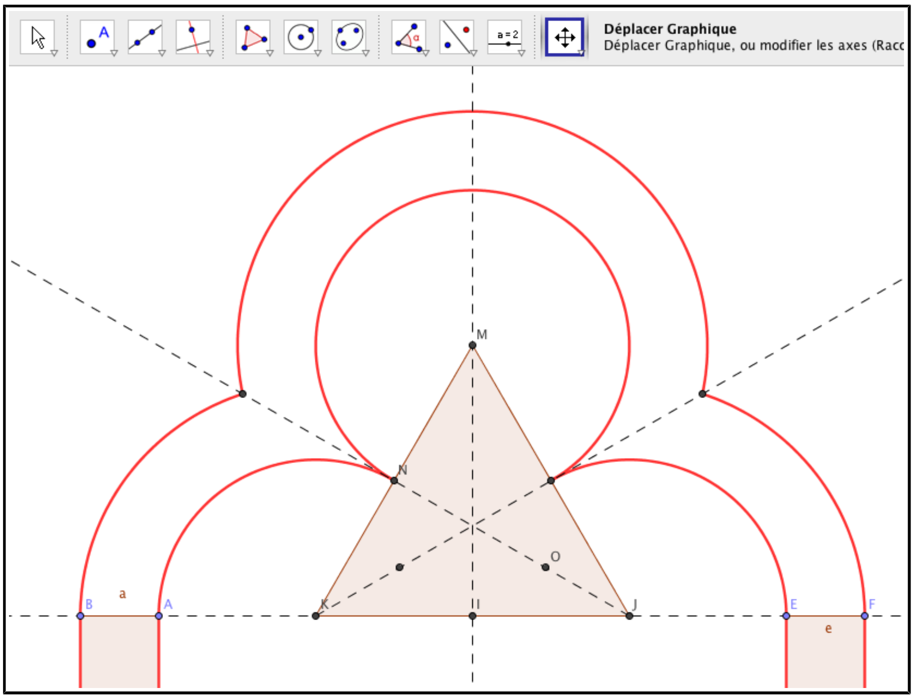
Durée de la séance : une heure

Dans un deuxième temps, on demande aux élèves de tracer un arc trilobé respectant le cahier des charges suivant :

- Les centres des trois arcs de cercle sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- Les points de contact des trois arcs avec ce triangle sont les milieux des côtés.
- Les points de contact des arcs supérieurs appartiennent aux médianes de ce triangle équilatéral.

Une fois le programme de construction établi, les élèves peuvent le tester une première fois sur papier, puis dans un second temps à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

1 Attention, si la photographie choisie comme support est prise « très en biais », l'effet de perspective transforme les cercles en des ellipses assez allongées et les constructions ne conviennent plus. Il faut éventuellement « redresser » les photographies (le logiciel *The Gimp* permet de le faire).



Question : les tangentes aux deux arcs de cercle ayant le point N comme point de contact sont-elles confondues?

c) Variante

Travail sur papier qui fait suite à l'étape 1.

La photo de l'arc trilobé affichée en début de paragraphe a été étudiée et on demande de reconstituer l'arc sous les contraintes suivantes :

- Le triangle formé par les centres des arcs de cercle est équilatéral.
- Les tangentes aux deux points de contact sont confondues.
- Dessiner l'arc en respectant l'échelle imposée.

L'image ci-contre a été préparée dans ce sens : la partie « masquée » est floue et l'effet de perspective a été compensé.

Objectifs : travail à la règle et au compas , respect de l'échelle.

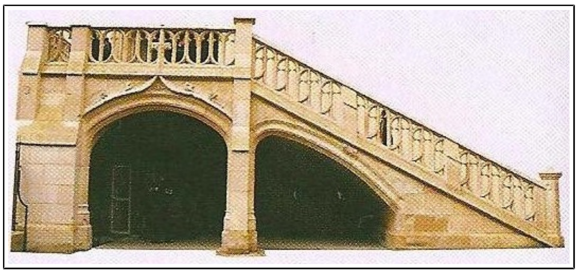
3. Les arcs rampants

a) Introduction

Ce sont des arcs dont les naissances sont placées à des hauteurs inégales.
Il sont fréquemment employés dans les frontons, les arcs-boutants, les murs en talus, et certaines voûtes d'escaliers.
Il s'agit de joindre deux piliers n'ayant pas la même hauteur à l'aide de deux arcs de cercle.

Vocabulaire associé à un arc rampant :

- **extrados** : courbe extérieure de l'arc
- **intrados** : courbe intérieure de l'arc
- **portée** : largeur de l'espace enjambé d'une retombée à l'autre (pour un arc en plein-cintre, c'est le diamètre).
- **retombées** : points d'appui d'un arc



b) Premier exemple d'arc rampant

On donne l'image qui précède aux élèves.

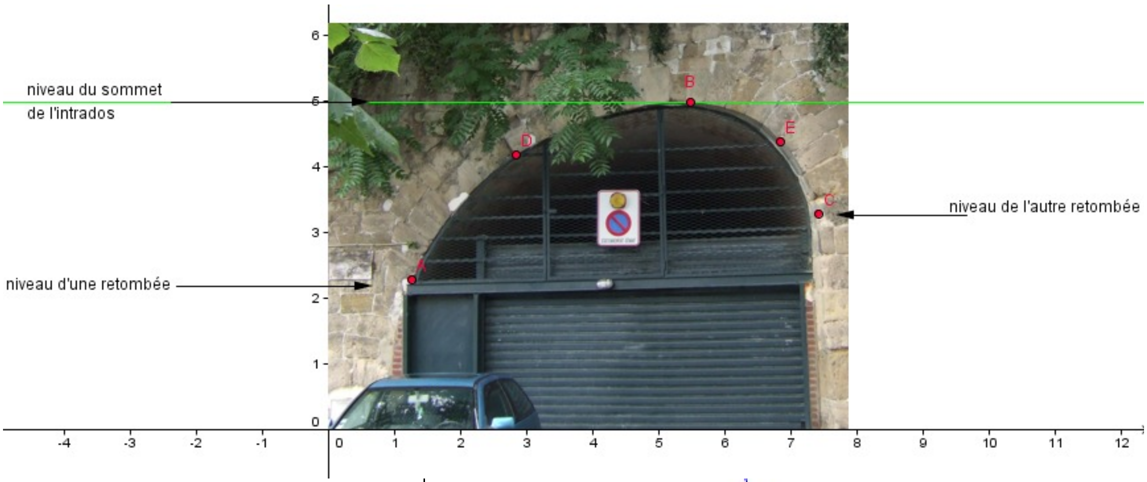
<u>**Objectif**</u>: Tracer les deux arcs de cercle qui composent cet arc rampant.

On laisse les élèves analyser la situation, puis on leur demande d'établir un programme de construction géométrique. Ils peuvent tester celui-ci sur papier, puis à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

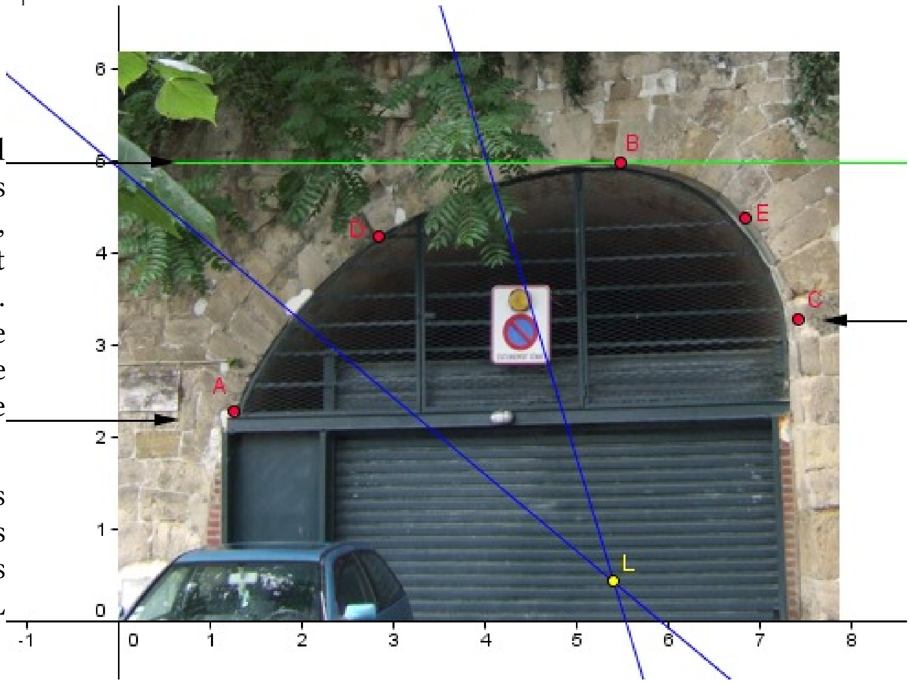
<u>Déroulement de la séance</u>: en dialogue avec la classe et au vidéoprojecteur

<u>Durée de la séance</u>: une heure

<u>Contraintes</u>: On souhaite qu'au niveau du point de contact des deux arcs de cercle, les tangentes soient horizontales.



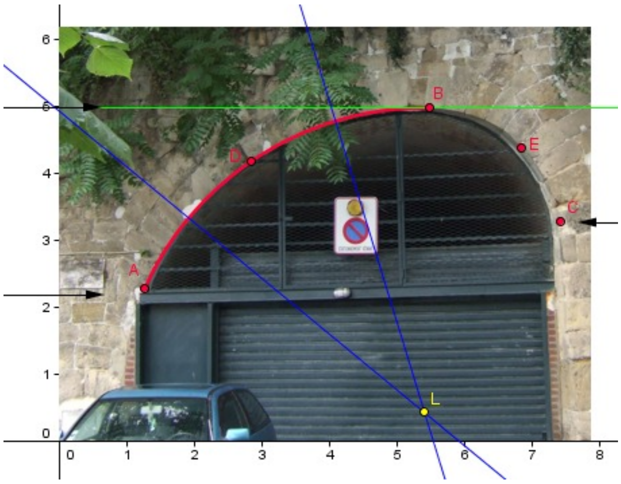
On définit dans un premier temps les différents niveaux de l'intrados.

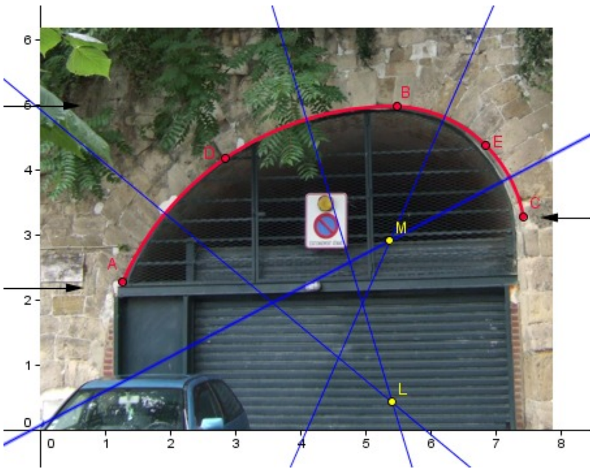


Pour tracer le premier arc, il est nécessaire de placer trois points, par exemple A,B et D, les points A et B définissant deux niveaux de l'intrados. Comment déterminer le centre du cercle correspondant à l'arc de cercle passant par A, B et D?

Il suffit de tracer les médiatrices respectives des segments [AD] et [BD], puis de déterminer l'intersection L de ces deux droites.[2]

On peut alors tracer l'arc de cercle de centre L de corde [AB]. Pour tracer le second arc, on place deux points C et E, C définissant le dernier niveau de l'intrados. On réitère le procédé avec les points B, E et C.

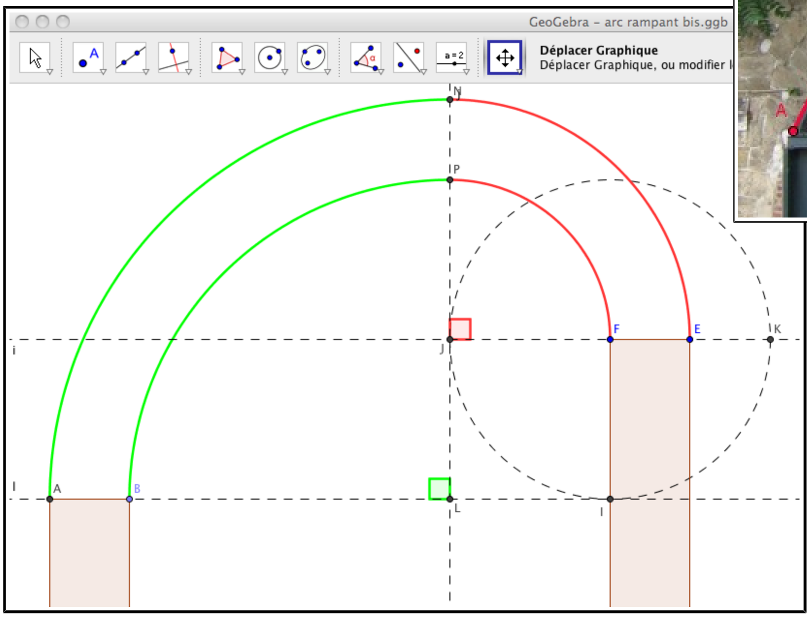




L'arc rampant tracé est très proche de l'arc existant.

2 Voir le paragraphe précédent.

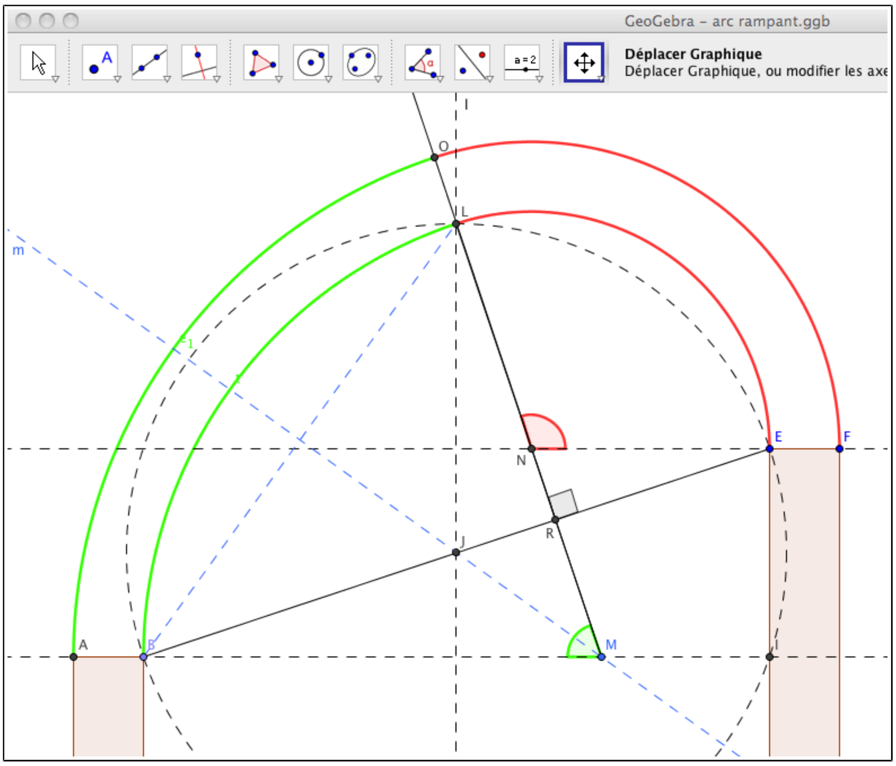
On peut également demander aux élèves d'établir un programme de construction, et le contrôler à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



***Attention** : dans cette dernière illustration, on a également imposé des raccordements au niveau des retombées, contrairement à ce qui a été fait précédemment.*

c) Même exemple, autre approche

Contraintes: On souhaite que le point de raccordement des deux arcs de cercle inférieurs se situe à égale distance de la base de chacun des piliers. On impose également un raccordement au niveau des retombées.



Le travail peut être fait en devoir maison en donnant la figure qui suit, en demandant aux élèves de l'analyser afin de dégager les conditions de sa réalisation, et de déterminer le programme[3] de construction correspondant.

On peut également demander aux élèves de déterminer la mesure des deux angles au centre indiqués sur la figure, ou de prouver que les droites (EB) et (ML) sont perpendiculaires, ou que la tangente commune est parallèle à la droite (EB).

On peut également demander aux élèves de déterminer la hauteur de l'édifice, une fois la distance

3 Le programme de construction est plus complexe à établir.

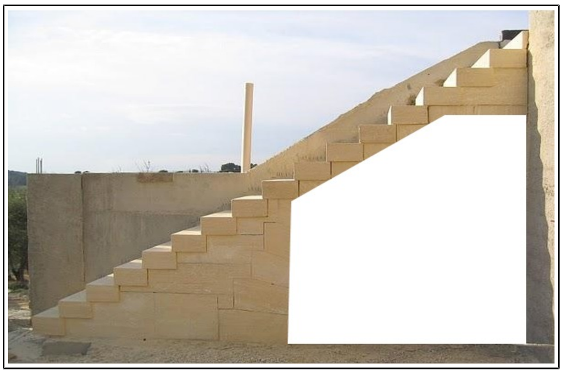
entre les deux piliers fixée, et la largeur des piliers donnée.

Compétences: analyse critique d'un document.

d) Travail de construction à la règle et au compas

Ce scénario est à envisager lorsqu'il n'est pas possible d'emmener la classe en salle informatique.

Premier cas : dessiner un arc rampant sous l'escalier.



On donne aux élèves l'image de gauche.

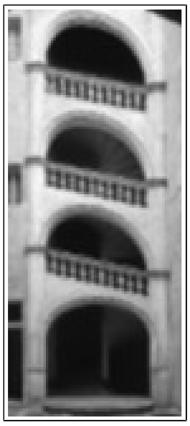
Objectif: tracer à la main, à l'aide de la règle et du compas, un arc rampant sous l'escalier[4].

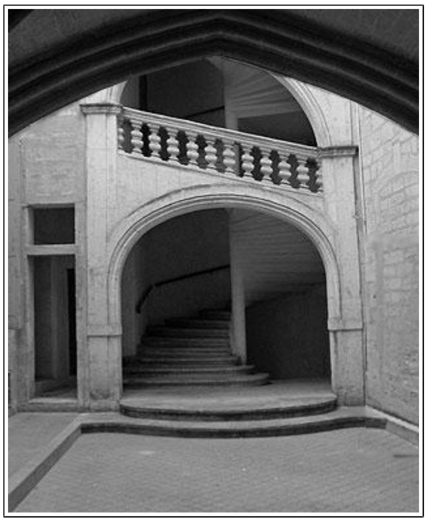
La prise d'initiatives, l'imagination et les qualités esthétiques sont des éléments essentiels dans le cadre de ce travail.

Deuxième cas.

L'hôtel de Mirman se trouve dans la vieille ville de Montpellier[5]. L'architecte Simon Levesville qui le fit construire en 1645 conçut, pour utiliser au mieux le volume disponible, un escalier-cage « à vis ouverte et à arc rampant ». Il s'agit, comme dans les situations précédentes, de dessiner les arcs dissimulés.

On donne comme support une vignette (légèrement floue) montrant la structure générale de l'escalier dans son état actuel et d'autre part une vue plus grande mais où les étages supérieurs sont masqués par une voûte ; le travail à accomplir alors est de dessiner (au trait et sans perspective) la structure complète de l'escalier.





Ce travail peut être réalisé en devoir maison, les exemples précédents ayant été traités en classe.

4 Ce scénario ne nécessite pas l'utilisation d'une salle informatique.

5 Inscrit à l'inventaire des Bâtiments de France, il se trouve place du Marché-aux-Fleurs.

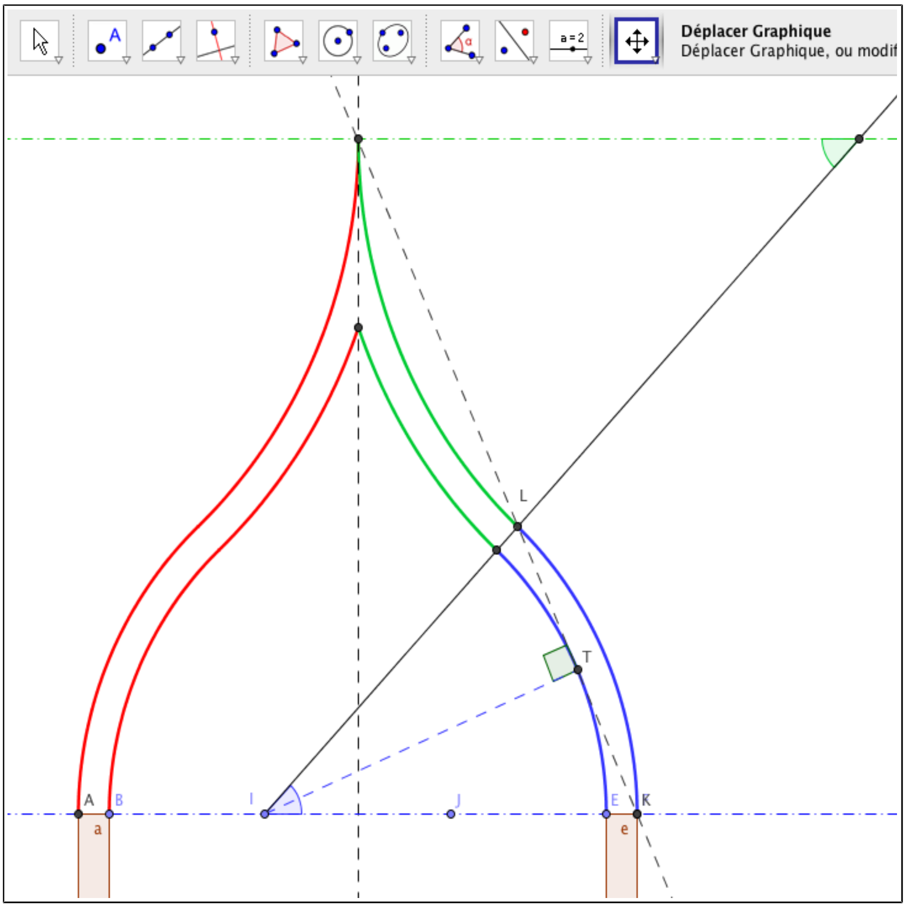
e) Complément bibliographique :

On pourra consulter avec intérêt le dictionnaire de l’architecture de Viollet-le-Duc, dans lequel figure une analyse assez précise de la voûte du cloître Saint Trophime d’Arles, qui est précisément un arc rampant.

http://fr.wikisource.org/wiki/Dictionnaire_raisonné_de_l’architecture_française_du_XIe_au_XVIe_siècle_-_Tome_3,_Cloître
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Cloitre.Saint.Trophyme.Arles.2.png

4. Pour la classe de Terminale : les arcs lancéolés

Ces arcs sont formés de deux courbes de concavités opposées (ci-dessous, palais de justice, Rouen).



Objectif :

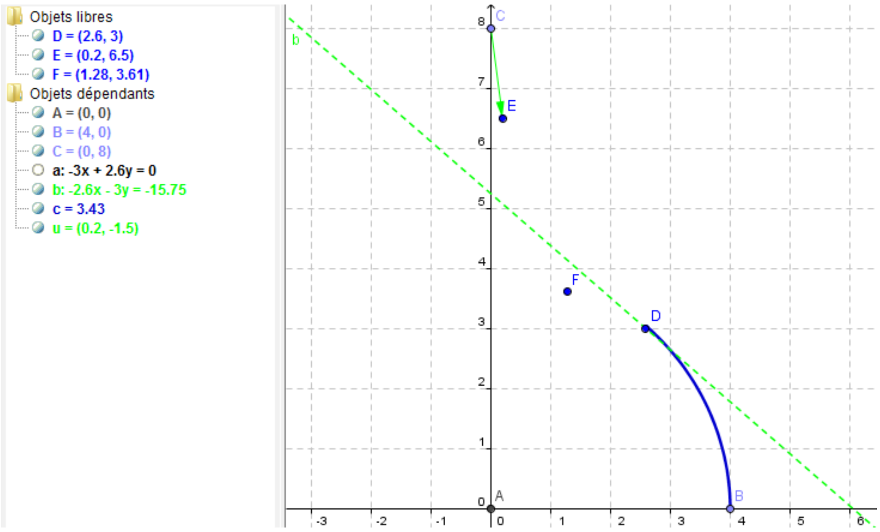
Version 1: déterminer le programme de construction à l'aide de la figure ci-contre.

Version 2:

On demande aux élèves de dessiner sur feuille la figure observée sur photo. Puis, on donne la feuille GeoGebra qui suit.

On demande alors aux élèves de déterminer une fonction dont la courbe représentative Cf restreinte à l'intervalle [0; 2,6], permet de tracer un arc qui, réuni à l'arc de cercle, donnera l'arc lancéolé inférieur en respectant les contraintes suivantes:

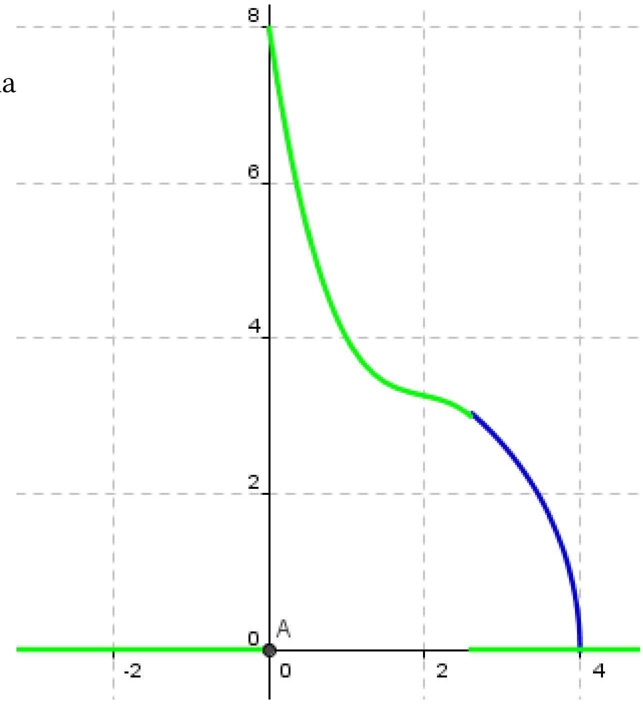
- La fonction f est polynomiale de degré 3.
- La courbe Cf passe par les points D, F et C.
- Au point D, les tangentes à la courbe Cf et à l'arc de cercle sont communes.



On amène les élèves à chercher, parmi les fonctions polynomiales de degré 3 celle qui vérifie, par exemple, les conditions :

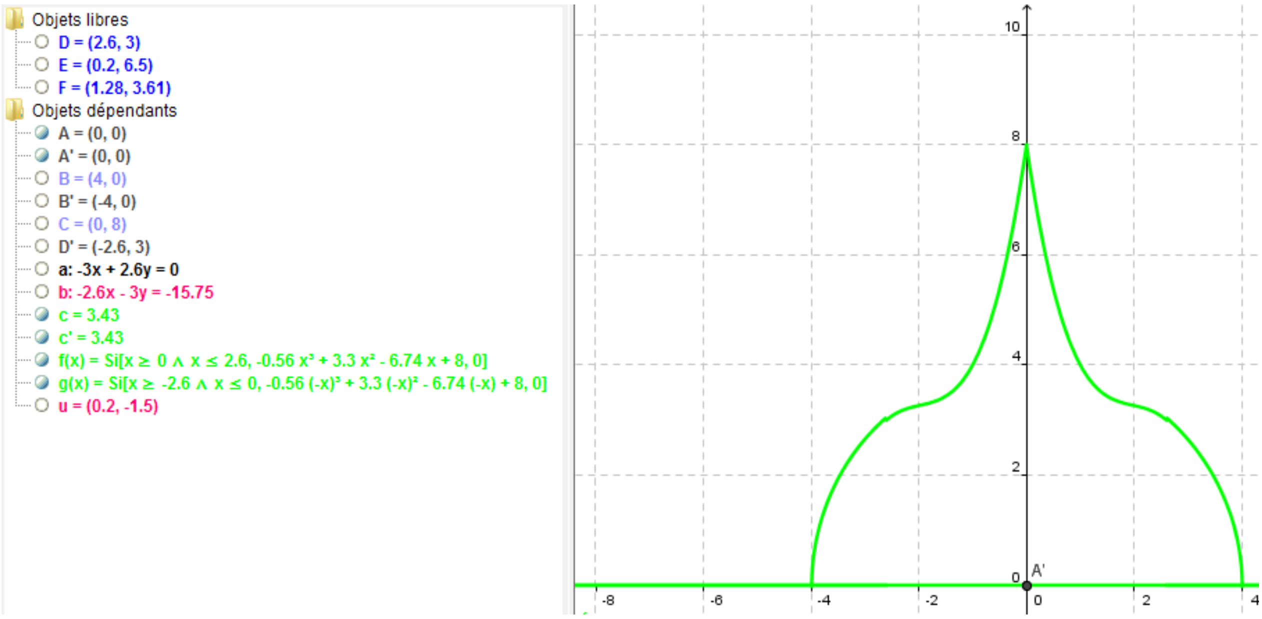
f(0)=8 ; f(2,6)=3 ; f(1,28)=3,61; f '(2,6)= -2,6 / 3 .

Une feuille de calcul formel[6] permet d'obtenir la fonction cherchée et de tracer l'arc correspondant :

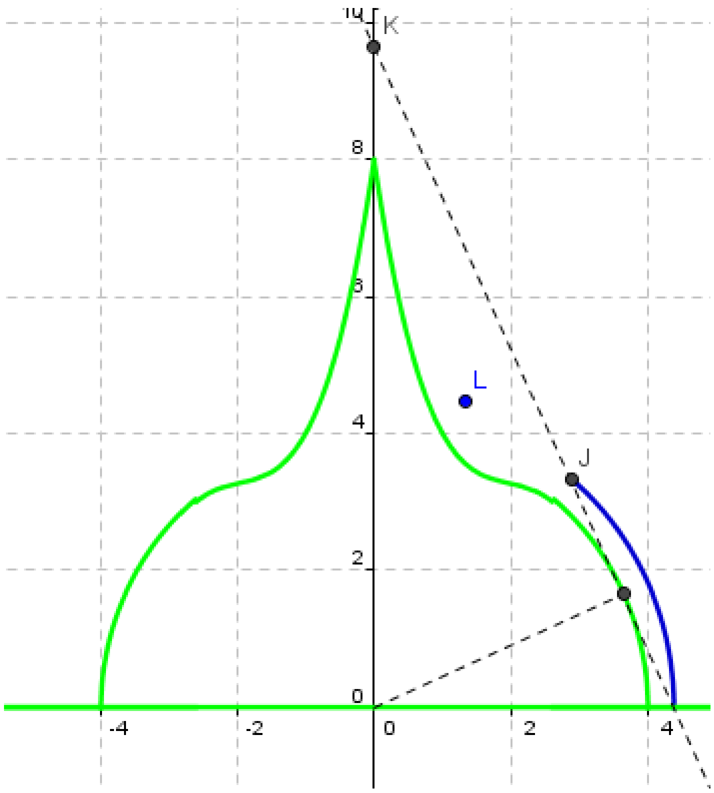


6 On peut consulter l'activité *Nuances de gris* par exemple.

Par symétrie[7], on obtient alors l'arc lancéolé suivant:



Il ne reste plus qu'à tracer l'arc lancéolé supérieur pour avoir l'arc complet en tenant compte des contraintes affichées[8].



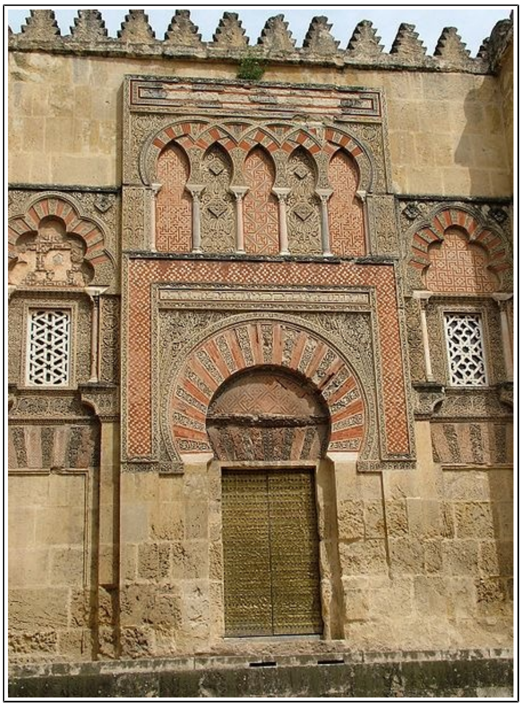
7 Les élèves seront amenés à définir la fonction g qui à *x* associe f(-x).

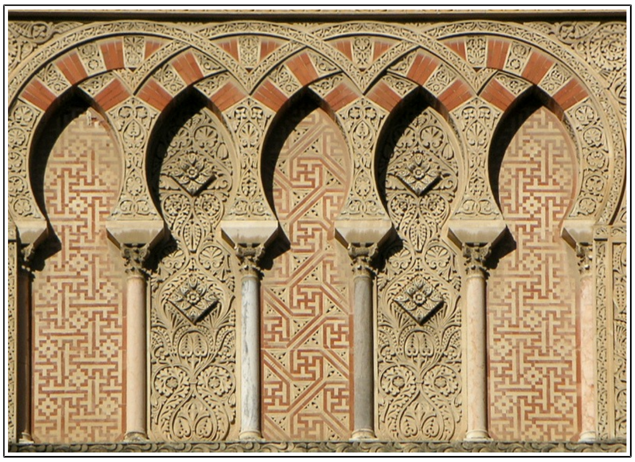
8 L'arc supérieur passe par les points K et L et admet au point J une tangente commune à l'arc de cercle supérieur.

5. Travail de recherche

Travail en groupe qui peut être suivi d'un exposé à la classe.

On donne la photo qui suit (façade Ouest de la mosquée-cathédrale de Cordoue) :





Ci-dessus : la partie supérieure, « redressée » (compensation de l'effet de perspective).

Objectifs: répertorier les différents types d'arc, reproduire chacun d'entre eux à la règle et au compas ou avec un logiciel de géométrie dynamique.