Ressources pédagogiques pour l'enseignement des Mathématiques en série STD2A

Conception d'un motif pour un imprimé

Thème

Concevoir un motif pour un tissu, un papier-peint.

Situation d'accroche

A quoi servent les mathématiques pour la conception d'imprimés ?

Document support

Production d'élève (croquis, dessin au trait)

Domaines

Raccordement de deux courbes
Fonctions polynôme du second degré
Frise et pavages
Symétrie et translation

Capacités

Traiter des situations simples de raccordement de deux courbes

Outils

Logiciel de géométrie dynamique
Logiciel de traitement de l'image

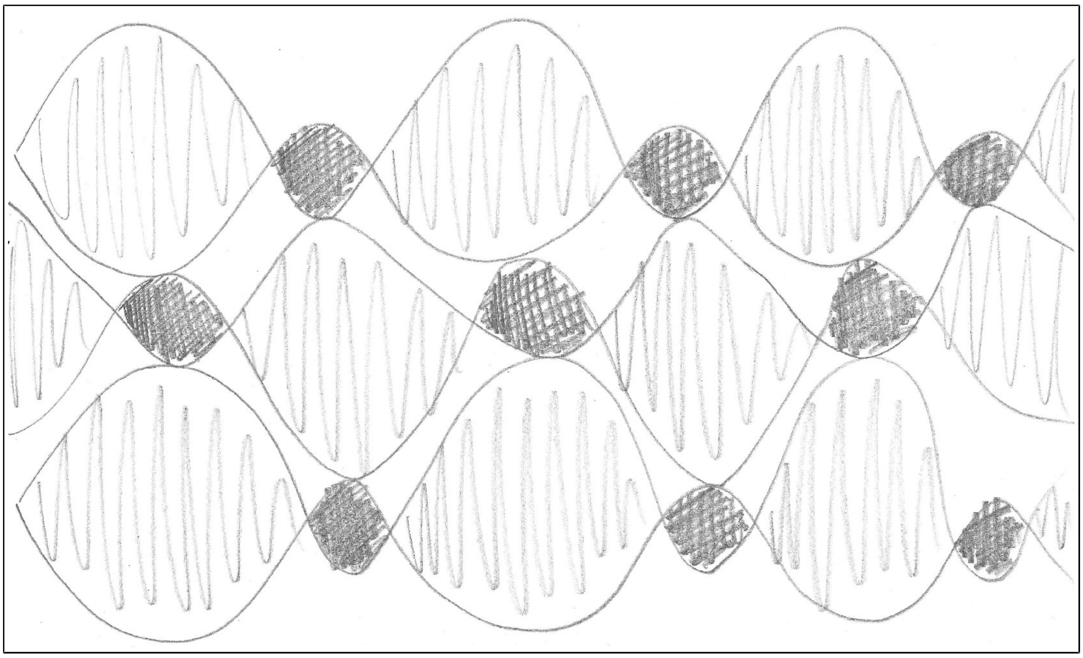
Auteurs

Ludovic Degraeve, Jean-Marc Duquesnoy

Conception d'un motif pour un imprimé

1. Préparation du motif

Étape 1: Voici le croquis produit par un élève.



On analyse avec la classe la composition géométrique. Il s'agit d'un pavage[1].

On isole la maille de ce pavage, puis on recherche les éventuelles symétries.

On recherche parmi les courbes mathématiques connues celles qui pourraient convenir ; en classe de Première ce sont essentiellement des arcs de cercle (visuellement peu adaptés !) ou des arcs de parabole qui ici vont bien convenir après un certain nombre d'ajustements.

Déroulement de la séance :Cette partie peut se faire en classe entière à l'aide du vidéoprojecteur et en discussion avec la classe.

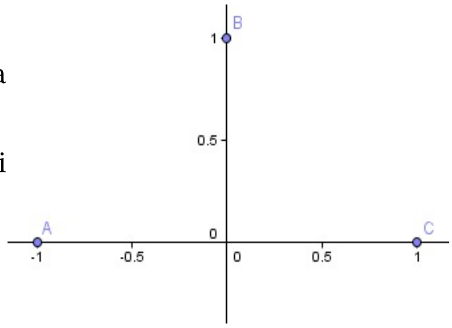
Durée de la séance : 1 heure.

Étape 2 : création du motif à l'aide du logiciel geogebra

Déroulement de la séance : deux séances de TD d'une heure chacune en salle pupitre ou au vidéoprojecteur en dialogue avec la classe sinon.

1 En cas de besoin, on peut considérer le pavage comme une « frise de frises », percevant d'abord les frises horizontales puis leur agencement vertical.

<u>Point de départ de l'étude</u> : On donne les trois points A, B et C.

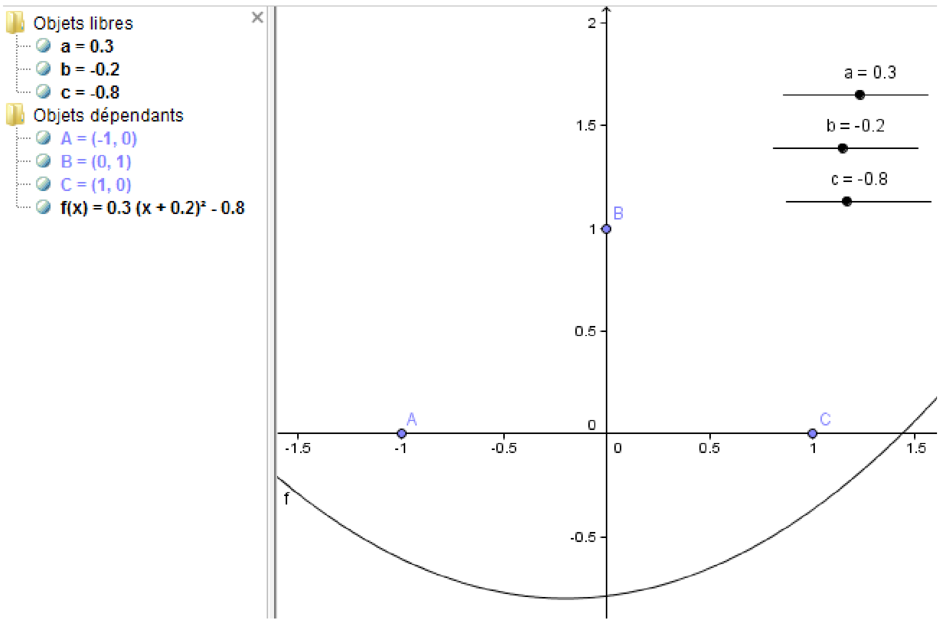


Les élèves doivent, dans un premier temps, déterminer la parabole passant par les trois points et de sommet B.

À l'aide d'un logiciel de géométrie, les élèves déterminent parmi les courbes d'équation $y=a(x-b)^2+c$ celle qui convient.

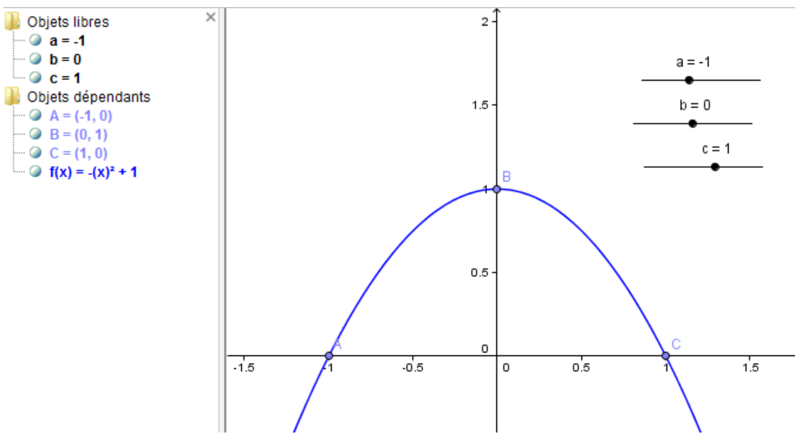
On peut envisager de valider la proposition analytiquement.

Les élèves expérimentent.



L'intérêt de la méthode est que les élèves prennent conscience du rôle de chaque paramètre *a*, *b* et *c* sur la position de la parabole ; commencer par *c*, puis *b* (pente au point d'intersection avec l'axe Oy) puis *a*.

La figure ci-dessous correspond à la situation où les élèves viennent de déterminer la parabole qui convient.

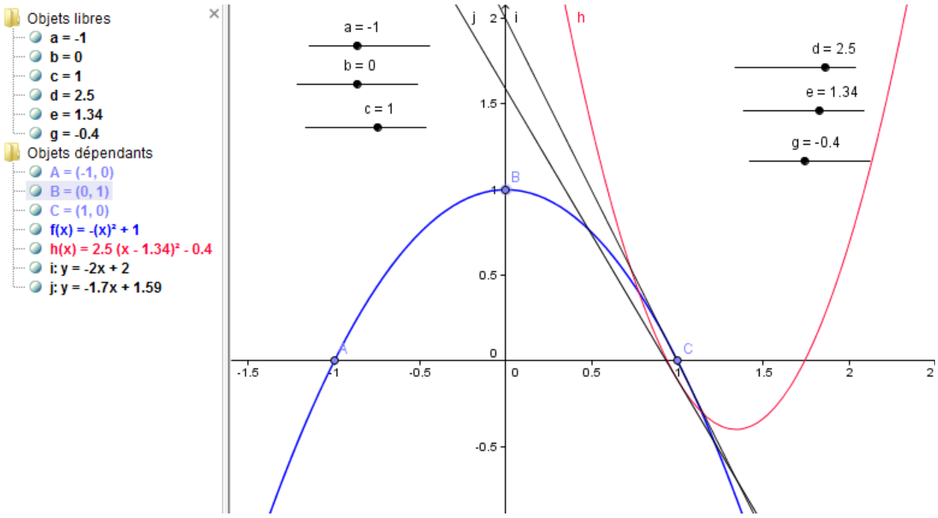


Il faut maintenant déterminer une deuxième parabole.

On choisit ici de laisser l'initiative aux élèves.

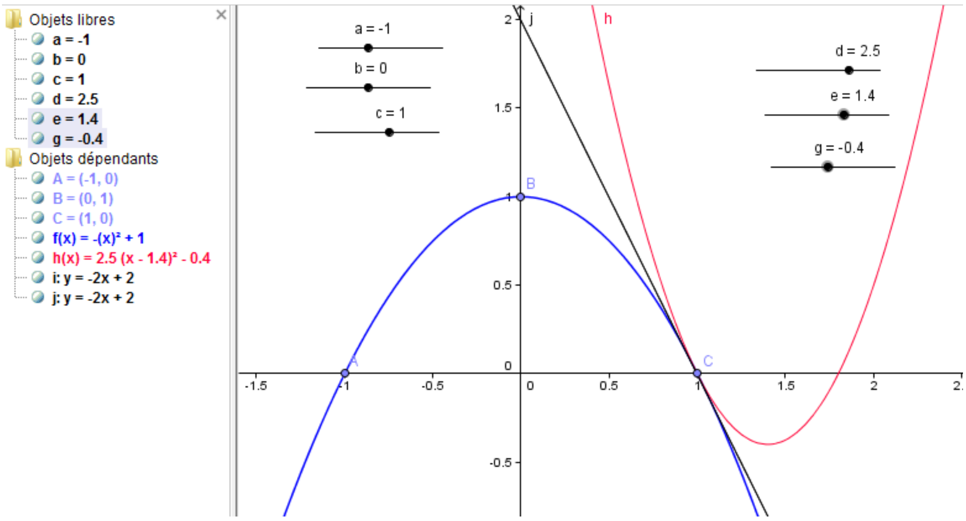
L'essentiel est de déterminer une courbe qui respecte l'allure du motif espéré.

Prises d'initiatives des élèves attendues : des curseurs, trois points fixés comme précédemment, ou seul le point C et une parabole qui respecte les proportions du motif + tangentes.



Problème : comment obtenir un raccordement « lisse » des deux paraboles?

Il s'agit de faire émerger progressivement la nécessité de rechercher une tangente commune aux deux paraboles au point de raccordement.



Le lien entre nombre dérivé et tangente peut alors être étudié plus en détail, ou bien en consolidation de la notion de tangente, ou bien en introduction de la notion.

Les élèves peuvent également contrôler, à l'aide des expressions algébriques fournies par le logiciel (équations des différentes paraboles et de la tangente), que la tangente est effectivement commune aux deux paraboles au point de raccordement.

Reste maintenant à dessiner le motif.

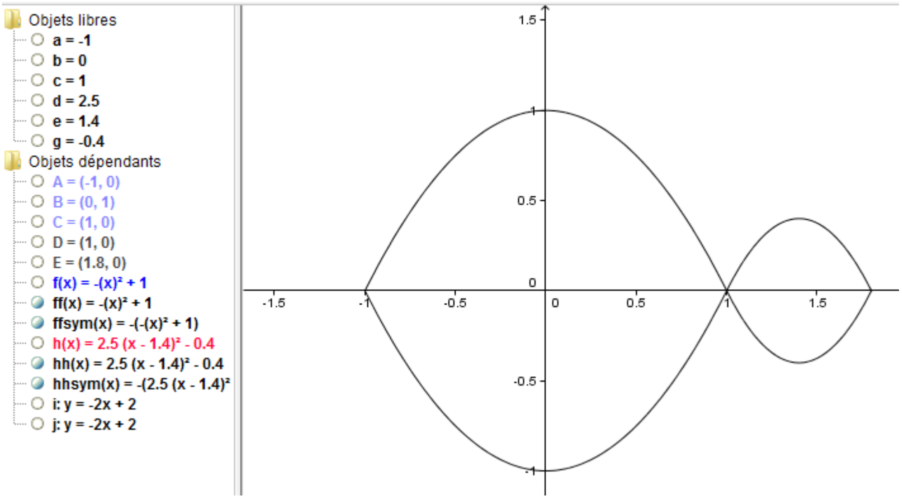
Le travail peut être demandé en devoir maison.

On donne la commande suivante: Fonction[f(x),a,b] qui permet de définir et tracer la courbe représentative de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a;b]$.

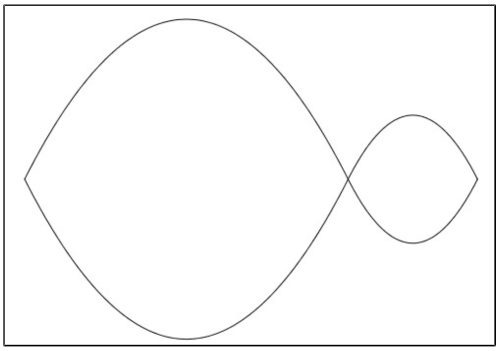
Remarques : Pour tracer les courbes symétriques des deux bouts de parabole, plusieurs questions se posent aux élèves:

- L'abscisse du point d'intersection de la deuxième parabole avec l'axe des abscisses sera à déterminer pour définir la restriction correspondante.
- Si, pour tout x appartenant à $[a;b]$, $g(x) = -f(x)$, quelle transformation permet de passer de C_f à C_g?

On obtient alors un motif qui répond au cahier des charges :

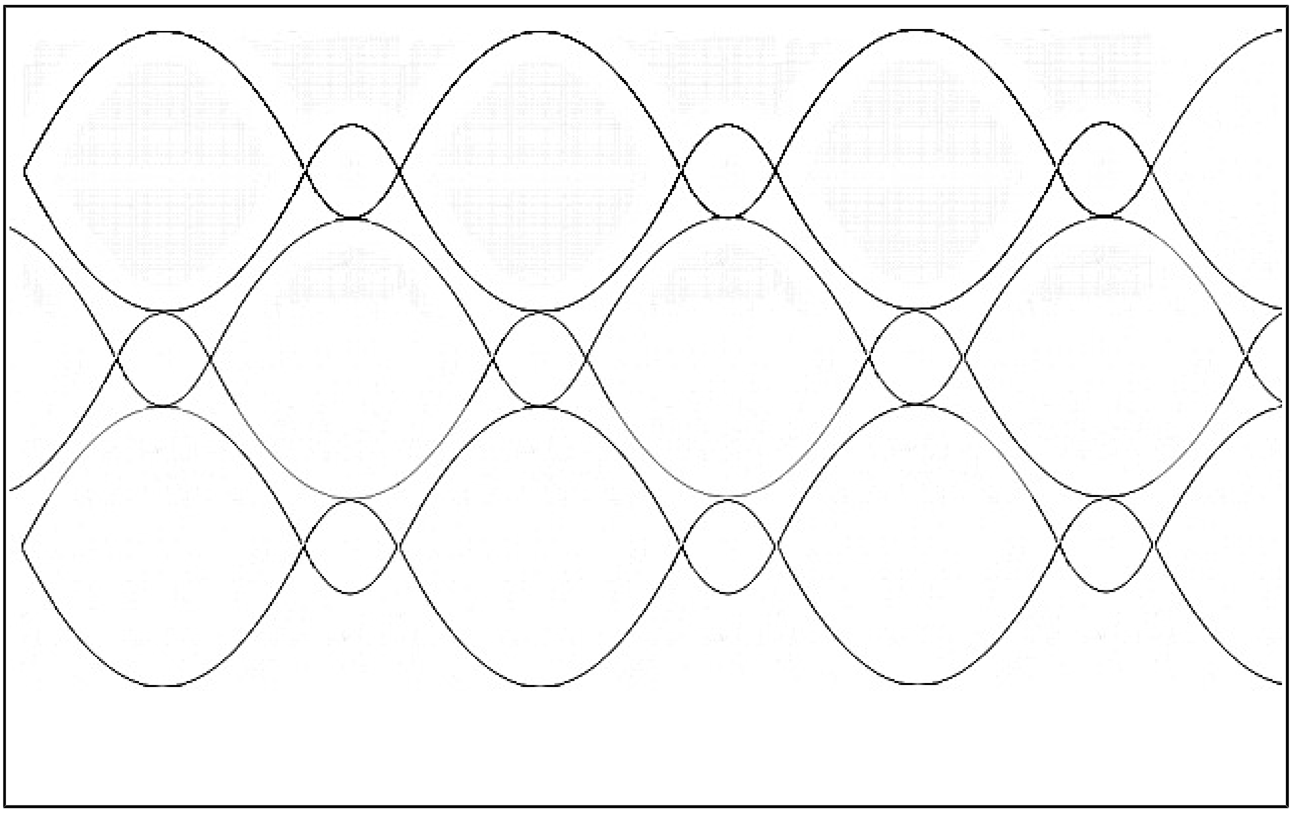


Et voici enfin le motif à dupliquer, débarrassé des détails mathématiques :



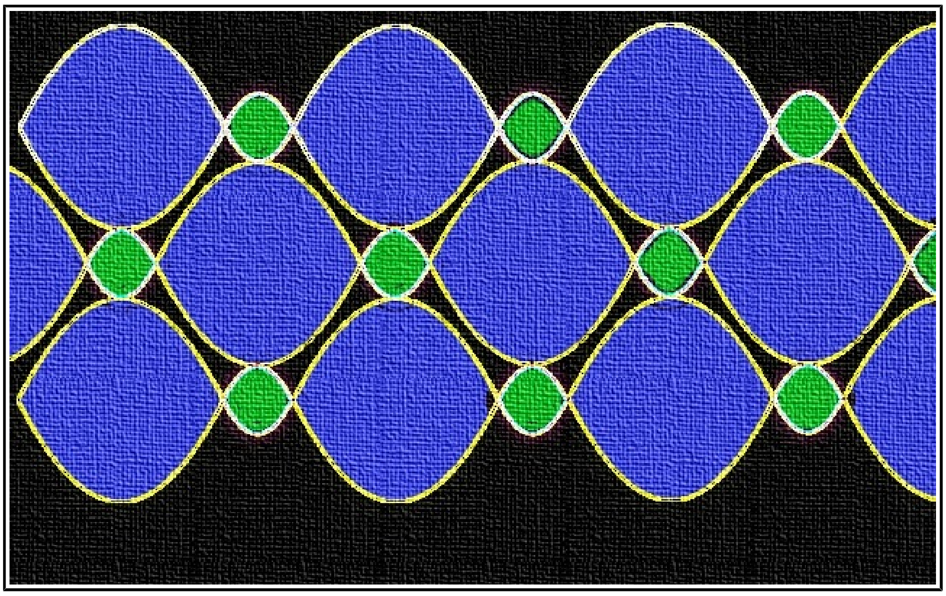
2. Duplication du motif

On réalise le pavage du plan à l'aide d'un logiciel de traitement de l'image (type photoshop) en copiant le motif, d'abord en horizontal, puis verticalement avec une translation adéquate.

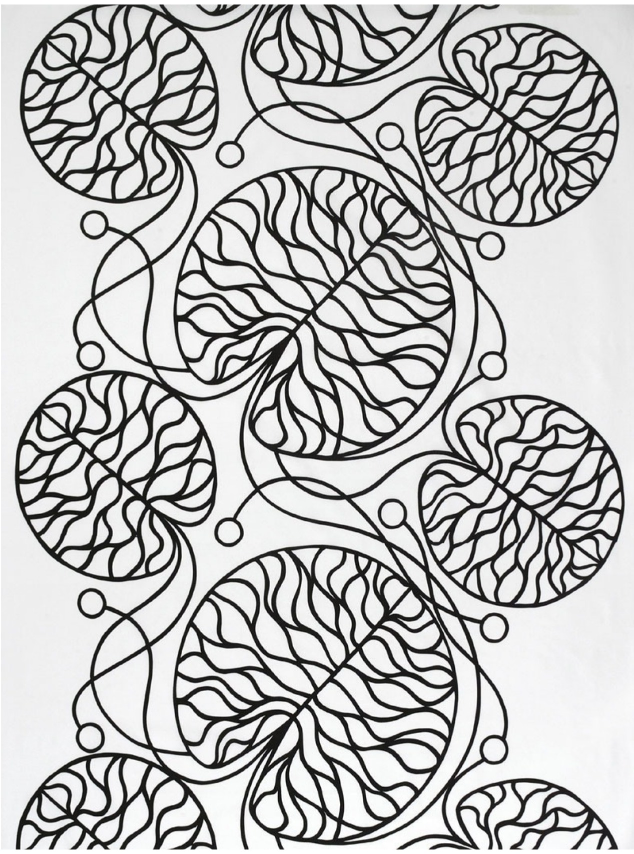


3. Finalisation

Utilisation de filtres pour l'« aspect » tissu (avec un logiciel de traitement d'image), etc.



4. Prolongement (classe Terminale STD2A)



Imprimé Bottna de Marimekko™

L'imprimé reproduit ci-contre est téléchargeable (et commandable) ici : http://www.scandinavia-design.fr/bottna-anna-danielsson-marimekko_en.html

Analyse globale de l'imprimé

Éléments de symétrie (ou de dissymétrie). Composition géométrique.

Analyse des nervures des feuilles de nénuphars

Approche par des polynômes de degré 3.

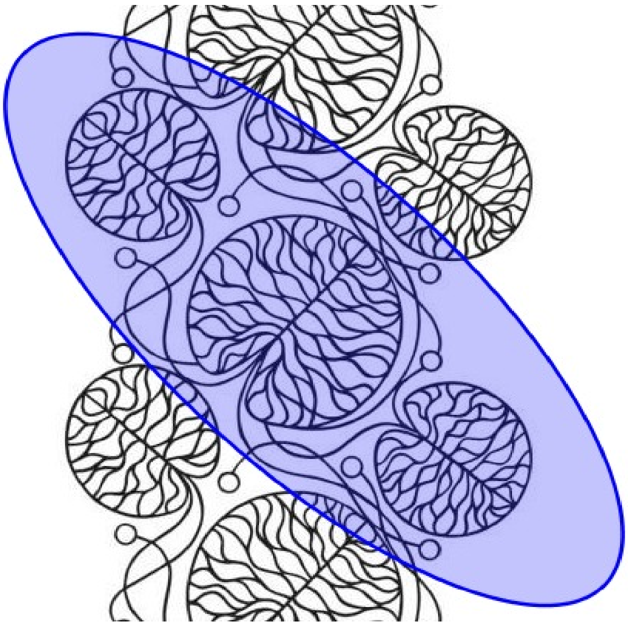
a) Étape 1: Analyse globale de l'imprimé.

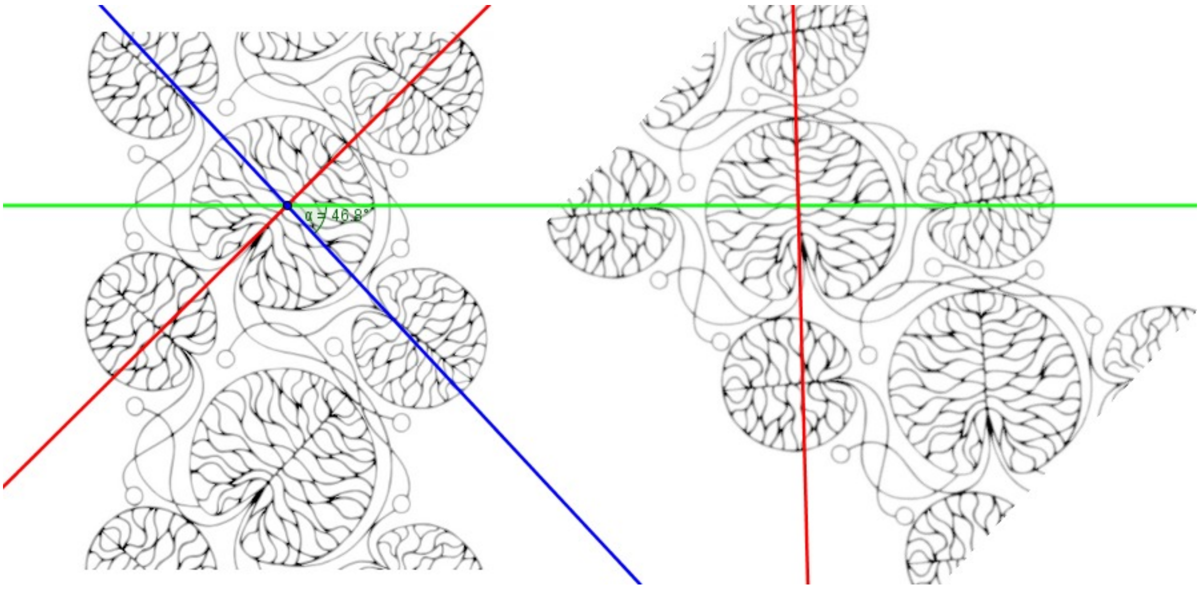
Déroulement de la séance: au vidéoprojecteur en dialogue avec la classe.

Durée de la séance: une heure.

On constate qu'il suffira d'appliquer à ce motif des translations verticales pour obtenir l'imprimé. Un motif est composé de trois feuilles, une grande et deux plus petites, et de plusieurs tiges partant de ces trois feuilles.

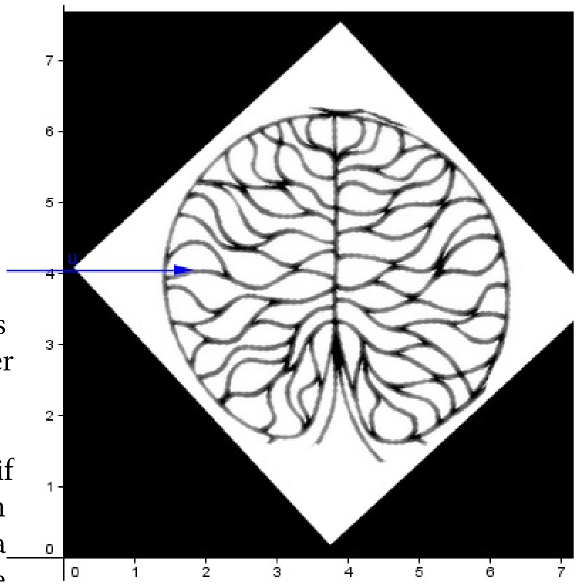
Recherche d'axe de symétrie: on insère l'image dans une feuille GeoGebra.
On remarque que les axes tracés permettent de définir la position des petites feuilles par rapport à la grande.
On applique à l'image successivement une rotation puis une translation, ce qui permet de mieux visualiser le motif et ses éventuelles symétries.





On remarque que les deux petites feuilles ne sont pas symétriques par rapport à l'axe rouge. De la même manière, on constate que les nervures de la grande feuille ne sont pas symétriques par rapport à l'axe rouge.
Le motif est donc, en dépit de son apparence, dissymétrique.

b) Étape 2: Analyse des nervures des feuilles de nénuphars.



Approche par des polynômes de degré 3

Déroulement de la séance: TD.

Durée de la séance: 1 heure.

La première partie peut se faire en classe.

On recherche parmi les courbes mathématiques de référence celles qui pourraient modéliser cette nervure.

Il n'est pas évident d'amener les élèves à proposer les fonctions polynômes de degré 3. On peut leur suggérer ces fonctions, en considérant qu'il s'agit d'une initiation.

On découpe la nervure en plusieurs morceaux, l'objectif fixé aux élèves étant de trouver une fonction polynomiale de degré 3 pour chaque morceau, dont la courbe restreinte à l'intervalle correspondant approche au mieux la portion de nervure.

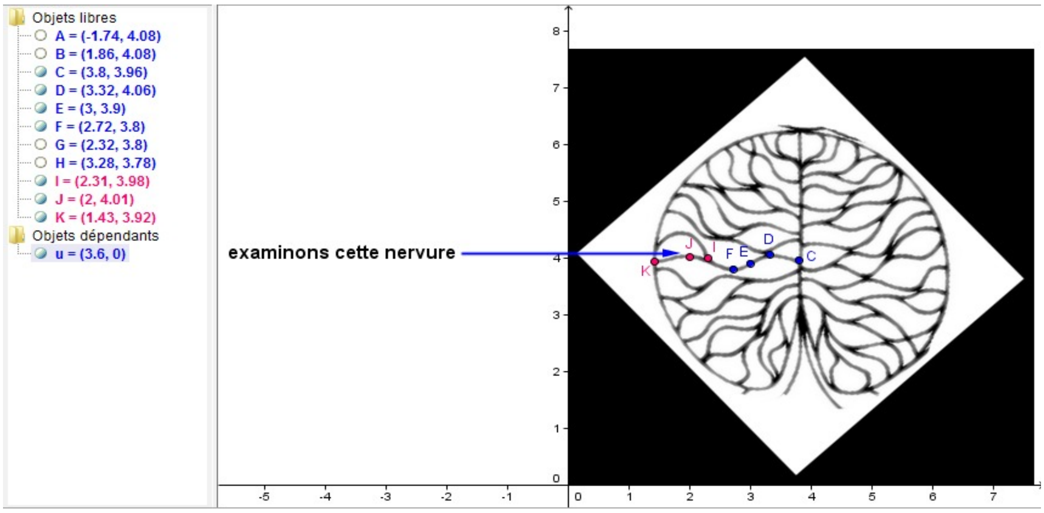
Exemple : On choisit sept points C, D, E, F, I, J et K (sur la figure) appartenant à la nervure.

Objectif : déterminer deux fonctions f et g dont les courbes représentatives C_f et C_g passent respectivement par les trois points D, E et F et F, I, J.

Contraintes:

- Les tangentes aux points D, F et J sont parallèles à l'axe des abscisses.
- Le raccordement des deux courbes répondant aux cahiers des charges des programmes de Première et Terminale.
- Amener les élèves à choisir des courbes dont les tangentes aux points D, F et J sont parallèles

à l'axe des abscisses.



Les contraintes aboutissent théoriquement à un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues, hors de portée des élèves excepté dans des cas très très simples et avec un guidage. On peut cependant faire résoudre ces problèmes en recourant à des logiciels de calcul.

Il peut être commode, en ce point, de remplacer le problème réel par un problème mathématiquement plus simple, mais analogue, avec des points à coordonnées entières dans un repère simple (notamment, en prenant comme origine l'un des points D ou F).

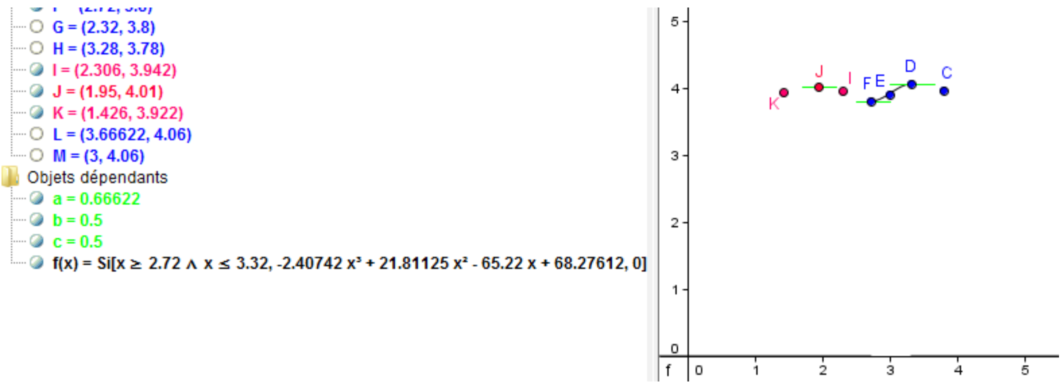
Par exemple, la feuille de calcul formel[2] suivante donne une fonction dont la courbe vérifie certaines des contraintes :

```
(%i1) f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d;define(g(x),diff(f(x),x));
(%o1) f(x):=a x^3+b x^2+c x+d
(%o2) g(x):=3 a x^2+2 b x+c

(%i3) linsolve([f(2.72)=3.8, f(3.32)=4.06, g(2.72)=0, g(3.32)=0], [a,b,c,d]);
rat: replaced -3.8 by -19/5 = -3.8
rat: replaced 20.12364800000001 by 13020/647 = 20.12364760432767
rat: replaced 7.398400000000001 by 4624/625 = 7.3984
rat: replaced 2.72 by 68/25 = 2.72
rat: replaced -4.06 by -203/50 = -4.06
rat: replaced 36.594368 by 48085/1314 = 36.59436834094368
rat: replaced 11.0224 by 6889/625 = 11.0224
rat: replaced 3.32 by 83/25 = 3.32
rat: replaced 22.1952 by 13872/625 = 22.1952
rat: replaced 5.44 by 136/25 = 5.44
rat: replaced 33.0672 by 20667/625 = 33.0672
rat: replaced 6.64 by 166/25 = 6.64
(%o3) [a=-690753375/286926368, b=12516451155/573852736, c=-23391672291/358657960, d=122438878069/1793289800]

(%i4) float(%);
(%o4) [a=-2.407423827286588,b=21.81125987521649,c=-65.22000038978642,d=68.27612473399448]
```

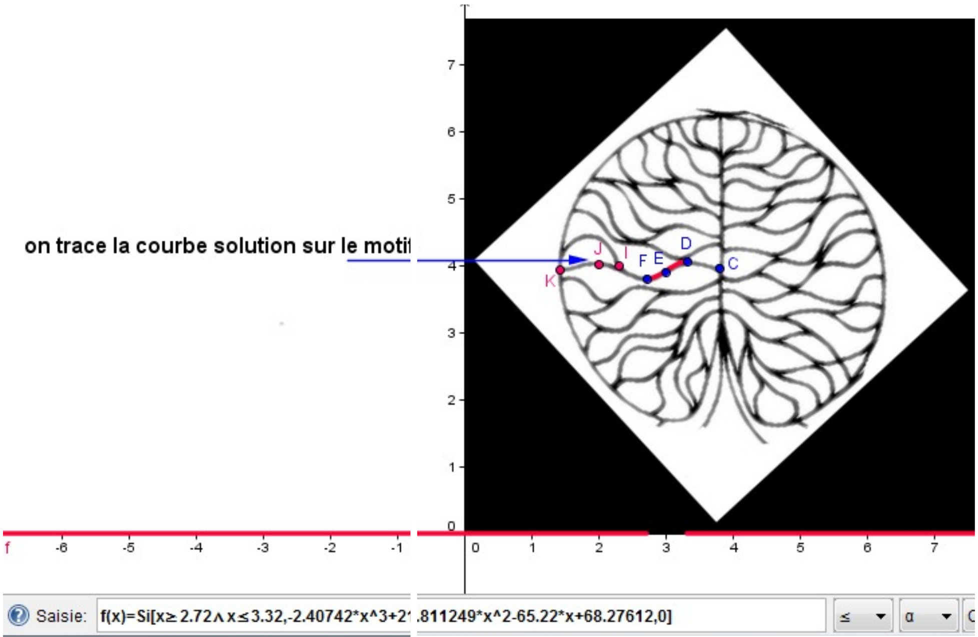
On peut vérifier que la courbe associée convient graphiquement.

2 Ici réalisée avec Maxima, un travail similaire est tout à fait possible avec Xcas :

```
f:= (x)->a*x*x*x+b*x*x+c*x+d;
linsolve([f(2.72)=3.8,f(3.32)=4,06,(function_diff(f))(2.72)=0,(function_diff(f))
(3.32)=0],[a,b,c,d]);
```



On peut le faire sur le motif :



La deuxième partie peut se faire en devoir maison.

On peut alors recommencer le procédé pour approcher graphiquement la nervure à l'aide fonctions polynomiales de degré 3 dont les courbes sont raccordées aux points ayant des tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

de

on trace la courbe solution sur le motif