

Ressources pédagogiques pour l'enseignement des Mathématiques en série STD2A

Perspectives cavalières, parallèles et créations graphiques

Thème

Découvrir la perspective parallèle à partir des arts d'Extrême-Orient, puis distinguer les différents types de perspective parallèle.

Domaines

Perspective parallèle

Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

Supports

Photographies, peintures, dessins, images de synthèse, notices de montage ...

Compétences

Analyser des documents

Représenter des objets de l'espace

Capacités

Connaître le vocabulaire et les propriétés de la perspective parallèle

Outils

Logiciel de géométrie dynamique, logiciel de modélisation 3D (non indispensables)

Crédits

Les reproductions de tableaux du musée Guimet sont autorisées par la RMN pour un usage pédagogique.

Les figures représentant des cubes et autres solides ont été réalisées avec Geogebra et retouchées dans Inkscape.

Le jeu vidéo 0 A.D. est un jeu à source libre produit par Wildfire Games.

Sitographie

http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Auteur/Androuet_du_Cerceau.asp

On trouve par ailleurs de nombreuses références sur l'enseignement de la perspective qui fit partie du programme de Mathématiques en classe de Première L jusqu'à 2011, par exemple :

<http://maths-03.site2.ac-strasbourg.fr/vogel/perspective.htm>

Auteurs

Ludovic Degraeve, Robert Cabane

Perspectives cavalières, parallèles et créations graphiques

Activité 1 : sensibilisation à la problématique de la perspective

Introduction

On propose aux élèves d'étudier l'effet de perspective pour ces œuvres coréennes nommées *Chaek'kori*.¹



L'aspect visuel, déroutant au premier contact, permet de faire exprimer aux élèves tout ce qui concerne l'organisation spatiale des scènes représentées par l'artiste ainsi que le mode de représentation choisi (qui participe à notre surprise).

L'échange avec les élèves peut faire apparaître de nombreuses notions : plan frontal, fuyantes, angle de fuite, coefficient de fuite, etc.

On amène progressivement les élèves à préciser leur vocabulaire et à analyser l'œuvre plus finement. Si besoin, une œuvre dépourvue de point de vue global (ci-contre) permettra de faire venir quelques critères discriminants.



¹ Epoque Choson, 18^e-19^e siècle. Ces œuvres se trouvent au Musée Guimet à Paris.

Premières constatations

On peut commencer par rappeler que la perspective est un code représentatif plus ou moins arbitraire mais rigoureux qui a pour but de donner des informations sur un ou plusieurs objets, ou une scène plus complexe.

Il est à présent possible de définir la perspective cavalière : c'est une projection oblique de l'objet sur un plan parallèle à sa face principale. Les faces parallèles au plan de projection sont en « vraie grandeur », ce qui signifie une conservation parfaite des angles et rapports de distances ; les autres faces sont déformées.²

On met alors en évidence quelques propriétés de la perspective cavalière.

- La représentation d'une droite est une droite ou un point.
- Les représentations de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Il y a conservation du rapport des longueurs de deux segments parallèles.
- Les représentations des figures situées dans des plans vus de face, appelés plans frontaux, sont en « vraie grandeur ».
- On appelle fuyante toute droite orthogonale au plan frontal.
- L'angle constant α que font les fuyantes avec une droite horizontale sur le plan de représentation s'appelle l'angle de fuite (en général, 30° ou 45°).
- On applique à la longueur de l'arête ([BC] dans la figure ci-dessous), et de manière générale à tout segment perpendiculaire au plan frontal, un coefficient de réduction (ou coefficient de fuite), souvent égal au cosinus de l'angle fuyant.

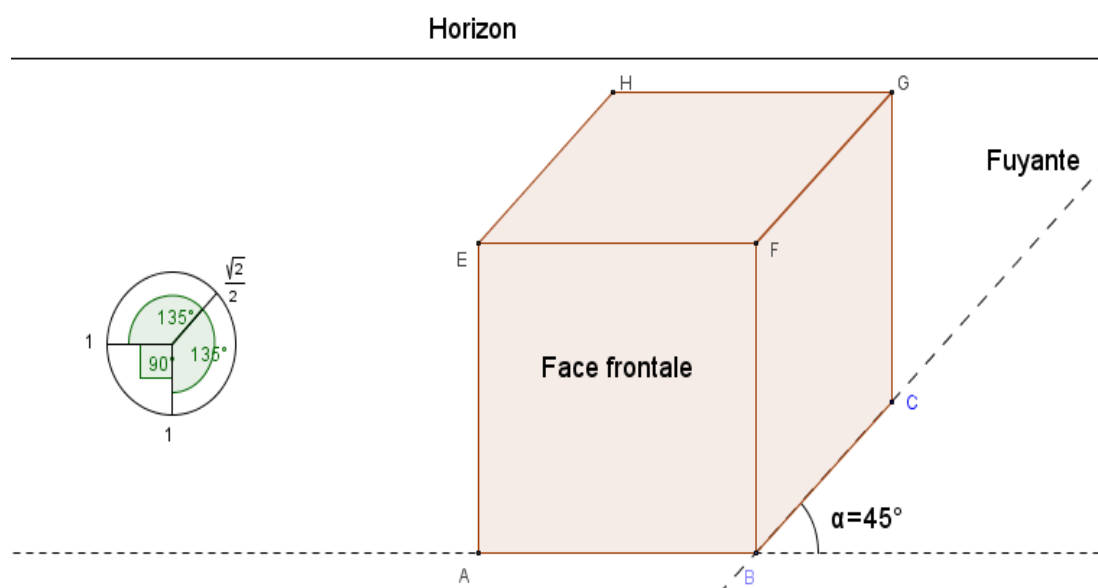


Illustration 1: Perspective cavalière d'un cube

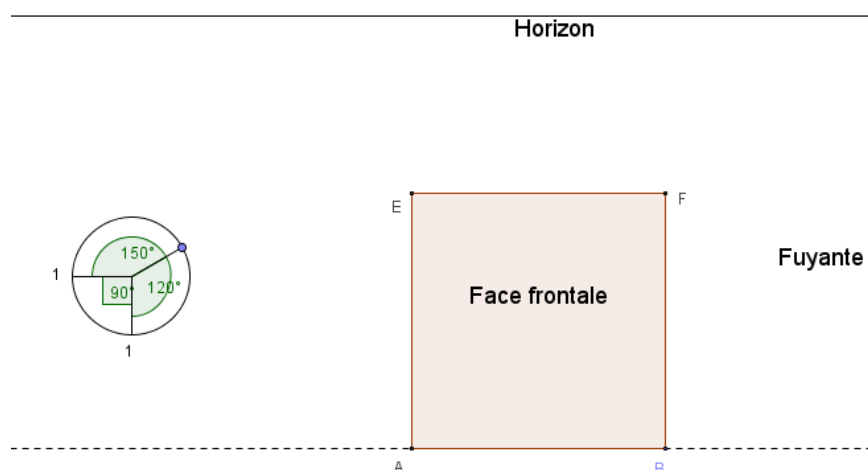
Exploitation

Objectifs : analyse de documents, trigonométrie.

En complément de ce qui précède, on peut demander aux élèves de finir le tracé sur feuille du cube

² La face « frontale » n'est pas nécessairement verticale ; en fait, la perspective cavalière tire son nom de l'art militaire (la vue du cavalier) sous la forme de plans au sol.

ABCDEFGH en traçant en pointillé les faces cachées. Puis, dans un deuxième temps, on peut demander de terminer le tracé d'un cube en utilisant les informations affichées qui suivent.



Activité 2 : Une famille de perspectives

Introduction

En plus de la perspective cavalière, d'autres perspectives parallèles dites « métriques » sont utilisées dans de nombreuses représentations et en dessin technique (ou industriel). Elles doivent informer sans déformer (c'est-à-dire, permettre une mesure). Ces perspectives ne sont pas mentionnées dans le programme de Mathématiques en série STD2A, mais les élèves y seront certainement confrontés par ailleurs ; il convient donc de les aider à discriminer ces différentes représentations.

Elles ont quelques points communs avec la perspective cavalière :

- elles sont définies par leur action sur le trièdre d'origine O et d'axes $[O,x)$, $[O,y)$, $[O,z)$;
- le parallélisme des plans et des arêtes est conservé ;
- les fuyantes sont raccourcies.

Toutefois, il y a deux différences essentielles :

- seule la perspective cavalière ne déforme pas la face avant ;
- au contraire de la perspective cavalière, les perspectives métriques sont des projections orthogonales, donc n'augmentent jamais les longueurs.

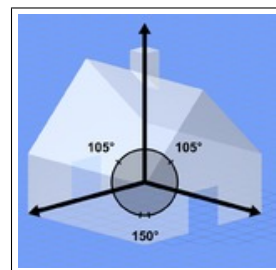
Une activité initiale autour du vocabulaire

Objectifs : analyse de document et trigonométrie élémentaire.

Ce qui suit correspond à des projections orthogonales du trièdre fondamental, positionné sans face parallèle au plan de projection.

La perspective dimétrique

Deux des trois directions de l'espace sont représentées avec la même norme sur chaque axe.



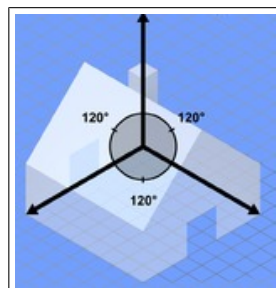
La perspective isométrique

C'est un cas particulier de perspective dimétrique.

Les fuyantes forment un angle de $\pm 30^\circ$ avec l'horizontale, et donc de 120° entre elles ainsi qu'avec la verticale.

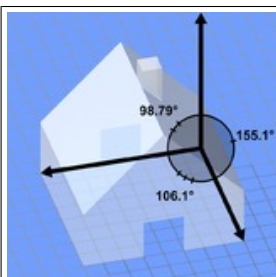
Très commode par la facilité de mesure qu'elle confère, elle peut s'avérer inadaptée selon le point de vue de l'observateur.

On peut faire vérifier par les élèves que le coefficient de réduction sur les axes vaut exactement $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



La perspective trimétrique

Les trois directions de l'espace sont représentées avec des normes différentes.



Intérêt pédagogique : faire réaliser par les élèves la représentation du cube dans les différentes perspectives évoquées ci-dessus.

Déroulement de la séance : en séance de travail dirigé, sur feuille ou bien à l'aide d'un logiciel de géométrie.

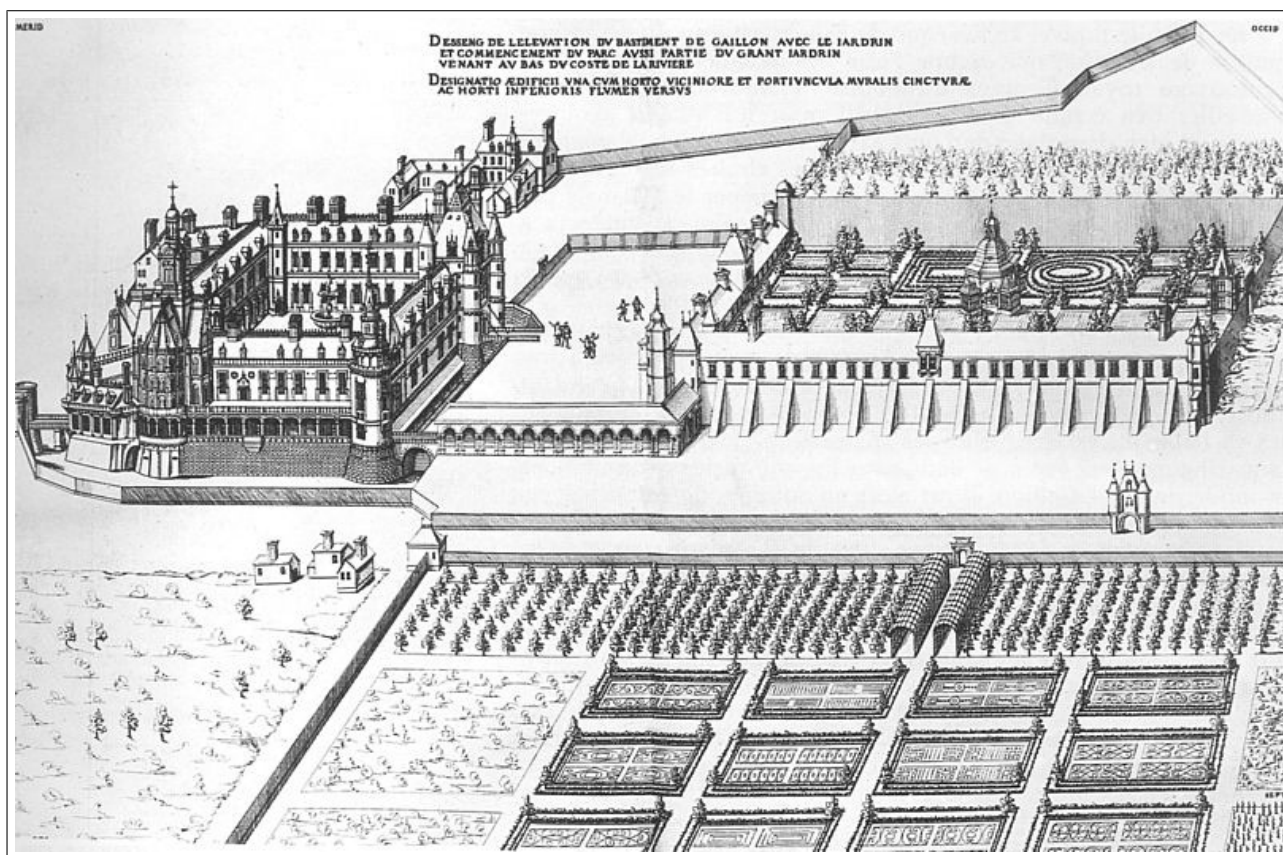
Activité de discrimination

Objectif pédagogique : développer les capacités d'observation et d'analyse face à des représentations perspectives données.

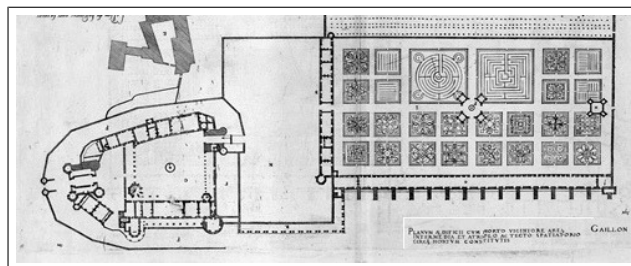
But de l'activité : dans les exemples qui suivent, certaines des perspectives présentées sont métriques et d'autres non. Il s'agit de déterminer lesquelles et, s'il y a lieu, d'identifier précisément (cavalière, dimétrique, trimétrique, isométrique) et en donner les caractéristiques (angles de fuite, éventuellement coefficient de fuite).

Cette activité peut être présentée sous forme de QCM, ou de liste d'appariement ou encore comme tâches isolées avec une démarche de synthèse en fin de parcours. Le vidéoprojecteur est ici recommandé pour un travail en classe entière.

Exemple 1 : le château de Gaillon, par Jacques Androuet du Cerceau



Observations : Cette gravure de l'architecte Jacques Androuet du Cerceau³ permet une exploitation à part. On peut ainsi comparer la vue perspective au plan du domaine (ci-contre), du même dessinateur, et en déduire le coefficient de fuite.



Après étude d'autres situations perspectives, on pourra revenir sur ces deux documents et poser la question suivante : « pourquoi l'architecte a-t-il spécifiquement choisi une perspective cavalière pour représenter le château de Gaillon ? »

³ Architecte de la cour de France, 1515-1585

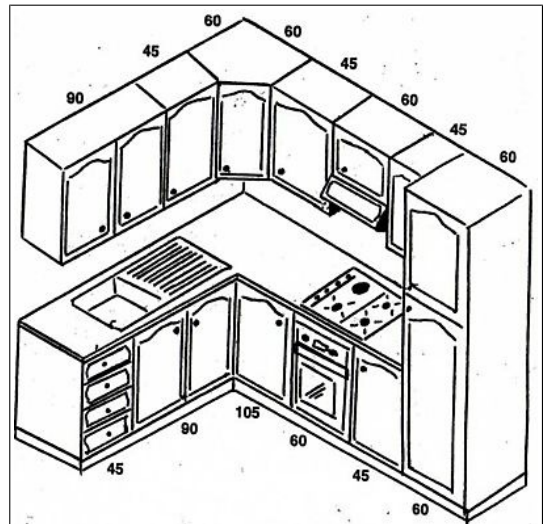
Exemple 2 : une estampe japonaise du XVII^{ème} siècle (Moronobu)

Il est ici intéressant de faire ressortir l'effet particulier obtenu avec la perspective parallèle : les représentations des divers personnages ont toutes la même taille, ce qui tend à leur conférer une « égale importance » dans la scène qui est représentée.



Exemple 3 : projet d'aménagement d'une cuisine intégrée

Observations : cette figuration permet de mettre en valeur le travail de positionnement quantitatif des divers éléments par rapport à un repère de l'espace (ici non représenté) et donc, en fin de compte, par rapport aux dimensions imposées et autres contraintes (murs, point d'eau, obstacles).

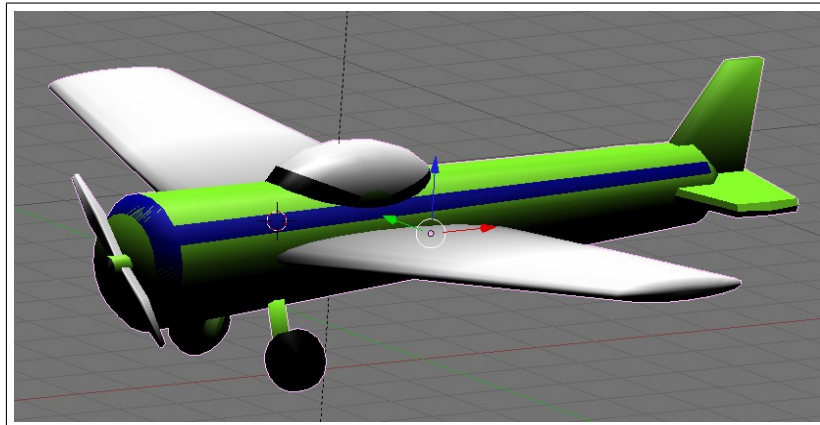


Exemple 4 : la Cité idéale⁴



⁴ Cette œuvre fut d'abord attribuée à Piero della Francesca puis à Luciano Laurana et maintenant à Francesco di Giorgio Martini ; elle se trouve dans Gallerie nazionale delle Marche à Urbino (Italie).

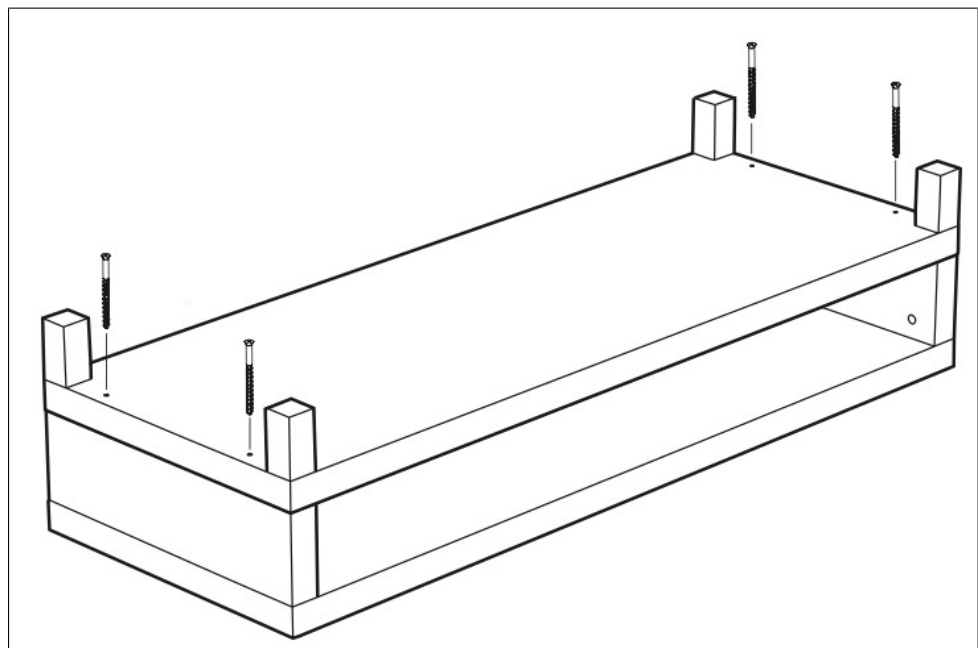
Exemple 5 : Conception Assistée par Ordinateur (CAO) (vue réalisée avec le logiciel Blender)



Exemple 6 : notice de montage d'un meuble

Exploitation possible :

Cet exemple, très simple, permet une identification rapide du type de perspective employé avant de suggérer une question de choix : pourquoi cette perspective est-elle en adéquation avec l'usage prévu (i.e. la compréhension du montage) ? Les élèves pourront chercher par eux-mêmes d'autres exemples similaires.



Exemple 7 : encore une peinture chaek'kori⁵

Cette œuvre nécessite une observation attentive, car elle est construite suivant un principe non hiérarchique qui rappelle l'estampe japonaise vue précédemment, tout en modifiant ce même principe afin de présenter une scène acceptable par l'œil.



⁵ Ce tableau se trouve au musée de Cleveland (U.S.A.).

Exemple 8 : jeu vidéo de stratégie

La copie d'écran ci-dessous est tirée du jeu de stratégie 0 A.D.⁶

Exploitation possible : au-delà de l'exercice de discrimination, cette image peut servir de « fil rouge » pour une progression autour de la perspective car elle combine une figuration du repère tridimensionnel (perceptible avec l'angle de la maison située au centre), la perspective isométrique, les ombres portées et l'ellipse comme projection du cercle en perspective parallèle.



Observations : Ce support est relativement familier aux élèves mais tend à disparaître au fur et à mesure que les ordinateurs et machines de jeu s'équipent en processeurs et cartes graphiques spécialisés, capables de traiter très rapidement les calculs requis par la représentation des scènes tridimensionnelles en perspective centrale. La vue en perspective métrique présente cependant de grands avantages : le déplacement de la scène se fait par simple translation des éléments encore visibles et affichage direct des éléments nouveaux à partir de portions préparées à l'avance.

⁶ Ce jeu est produit par Wildfire Games et diffusé sous licence GPL ; les images sont sous licence CC-BY-SA.

Activité 3 : Étude de la composition d'une estampe de Harunobu

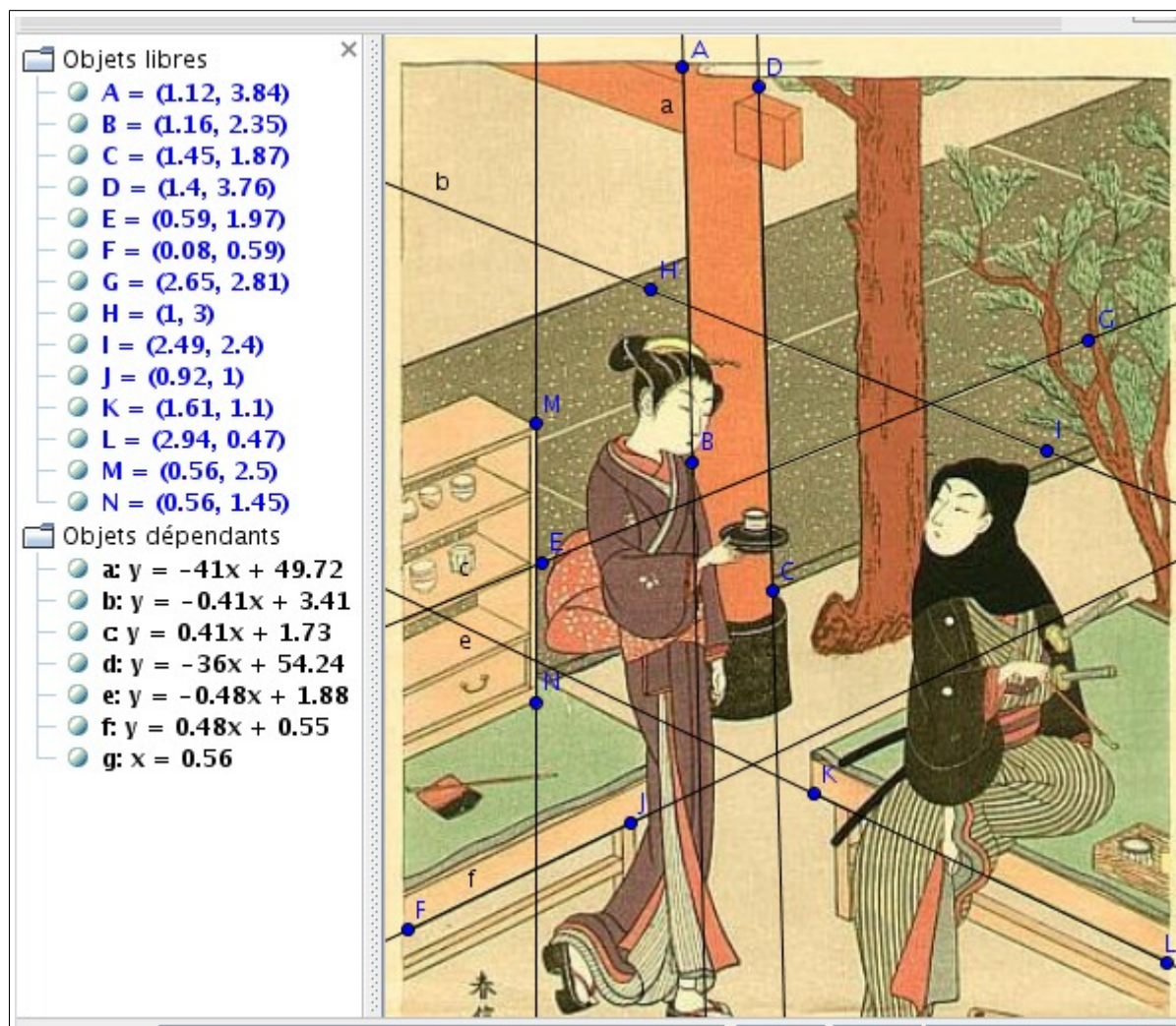
Objectif pédagogique : détecter les décalages par rapport au code représentatif de la perspective parallèle et leur donner un sens.

On présente aux élèves une reproduction d'une œuvre du célèbre peintre japonais (ci-contre)⁷. Il s'agit d'examiner jusqu'à quel point l'artiste se sert des règles de la perspective parallèle.

L'œil ne suffit pas pour détecter les légers décalages de composition ; il est donc préférable de donner aux élèves un accès à la reproduction, soit sous forme d'un fichier utilisable dans un logiciel de géométrie dynamique (ici, geogebra) soit sur une feuille de papier sur laquelle l'élève pourra faire quelques tracés.

Les équations des droites relevées montrent que certaines parties de la scène répondent bien au principe de la perspective dimétrique (les deux tables notamment) mais qu'il n'en est pas ainsi pour l'ensemble de la scène. En particulier, la non-verticalité du poteau peut tout à fait avoir été choisie par Harunobu dans le but de donner un aspect plus « naturel » à sa composition.

Note : cette estampe présente aussi l'intérêt de montrer un repère de l'espace (l'étagère aux tasses).



7 Harunobu Suzuki 1724-1770

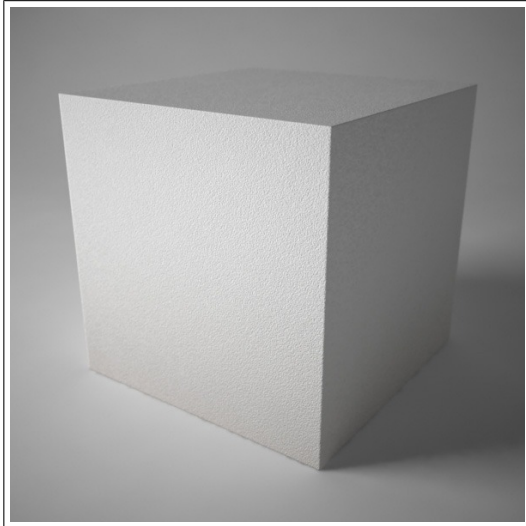
Activité 4: construction d'un objet en perspective, le cube de Menger

Objectif pédagogique : réinvestir et consolider les connaissances sur la perspective cavalière

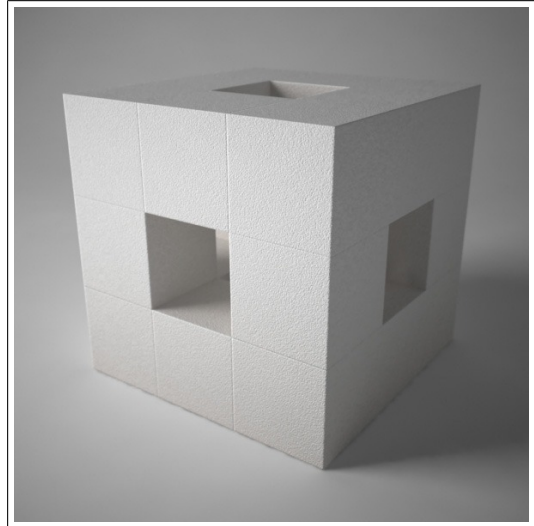
Principe : à chaque itération on coupe chaque cube en trois en long, en large et en travers, puis on retire les cubes centraux. Voici quelques photos qui illustrent les deux premières itérations.

Attention, sur ces photos, le cube n'est pas représenté en perspective parallèle ...

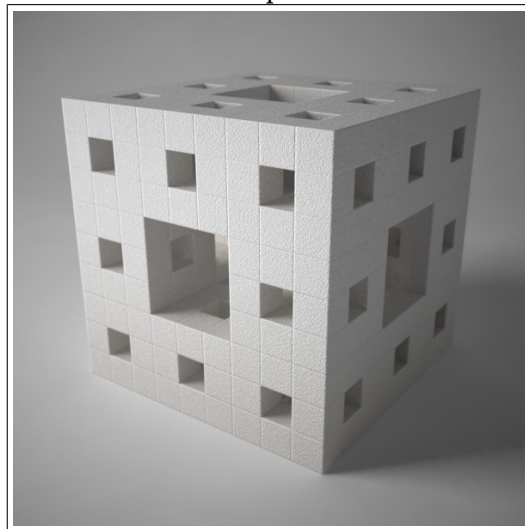
Étape 1



Étape 2



Étape 3



Travail proposé : choisir une face du cube comme plan frontal, puis représenter les étapes 2 puis 3 en perspective cavalière (angle de fuite 30° , et coefficient de fuite 0,5)

Pour aller plus loin, on peut éventuellement demander aux élèves de représenter ce cube en perspective isométrique ou dimétrique.

Déroulement de la séance : séance de travaux dirigés en effectifs réduits

Durée de la séance : 1 heure

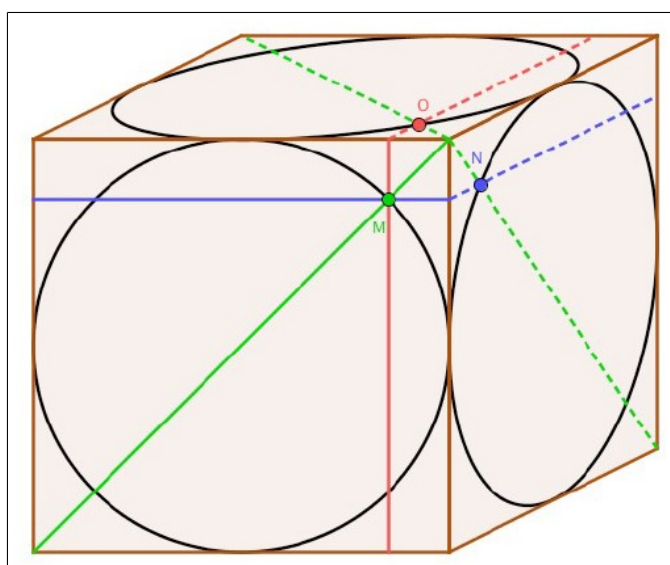
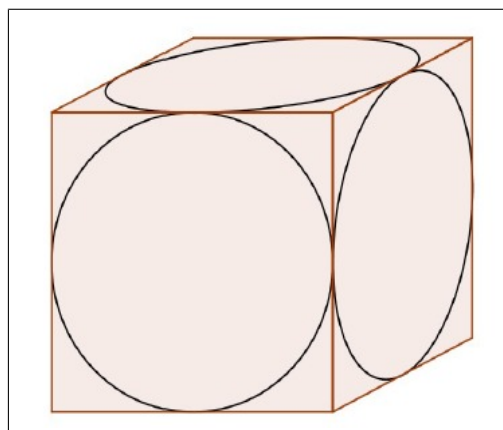
Remarque : on peut différencier le travail demandé, l'étape 3 étant proposée en classe aux élèves les plus à l'aise et en devoir maison aux autres.

Activité 5: Représentation d'un cercle en perspective cavalière

Objectif pédagogique : préparer le travail sur les ellipses (classe terminale) par une première approche n'introduisant pas de connaissance nouvelle.

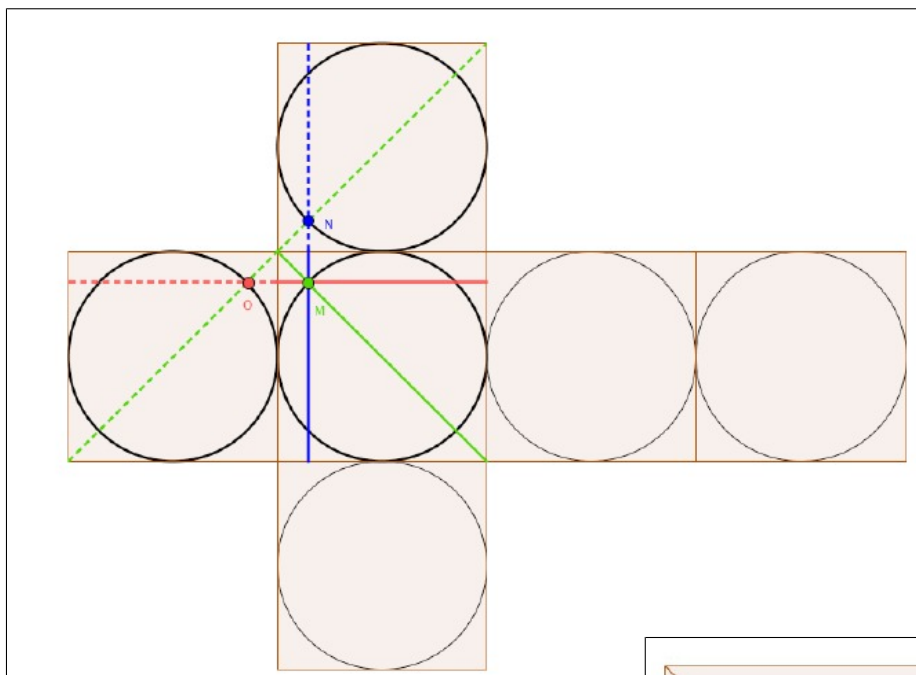
On considère un cube. Sur chacune de ses faces, on a tracé un cercle tangent aux quatre arêtes. On montre, ci-contre, sa représentation en perspective cavalière. La face frontale ne pose aucun problème particulier, mais que se passe-t-il sur les autres faces ?

La figure suivante suggère une méthode de construction pour représenter en perspective cavalière certains points des cercles situés sur la face supérieure et une face latérale du cube.



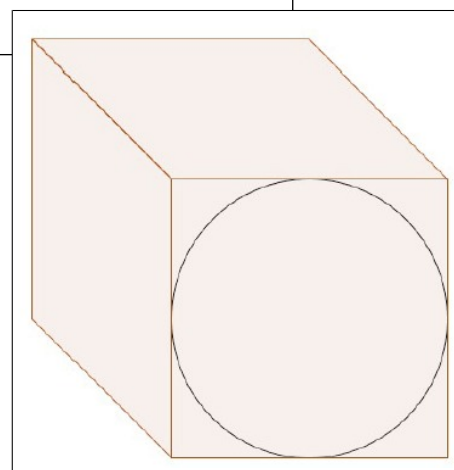
Travail proposé : décrire simplement les différentes étapes permettant de placer les points M, puis les points N et O sur la figure 1. A l'aide d'un patron du cube, expliquer pourquoi, dans la réalité, les points N et O se situent effectivement sur les cercles tracés sur les faces du cube.

Observation : le patron est un intermédiaire important pour aider les élèves à « construire » et développer leur perception de l'espace (sens tridimensionnel). Pratiquée au collège, cette activité garde tout son sens dans les classes ultérieures !



Sur la figure ci-contre, placer les points de contact des cercles avec les arêtes, puis généraliser la méthode de construction proposée afin de déterminer d'autres points situés sur la représentation en perspective cavalière des cercles tracés sur la face supérieure et la face latérale. Finir le tracé à main levée.

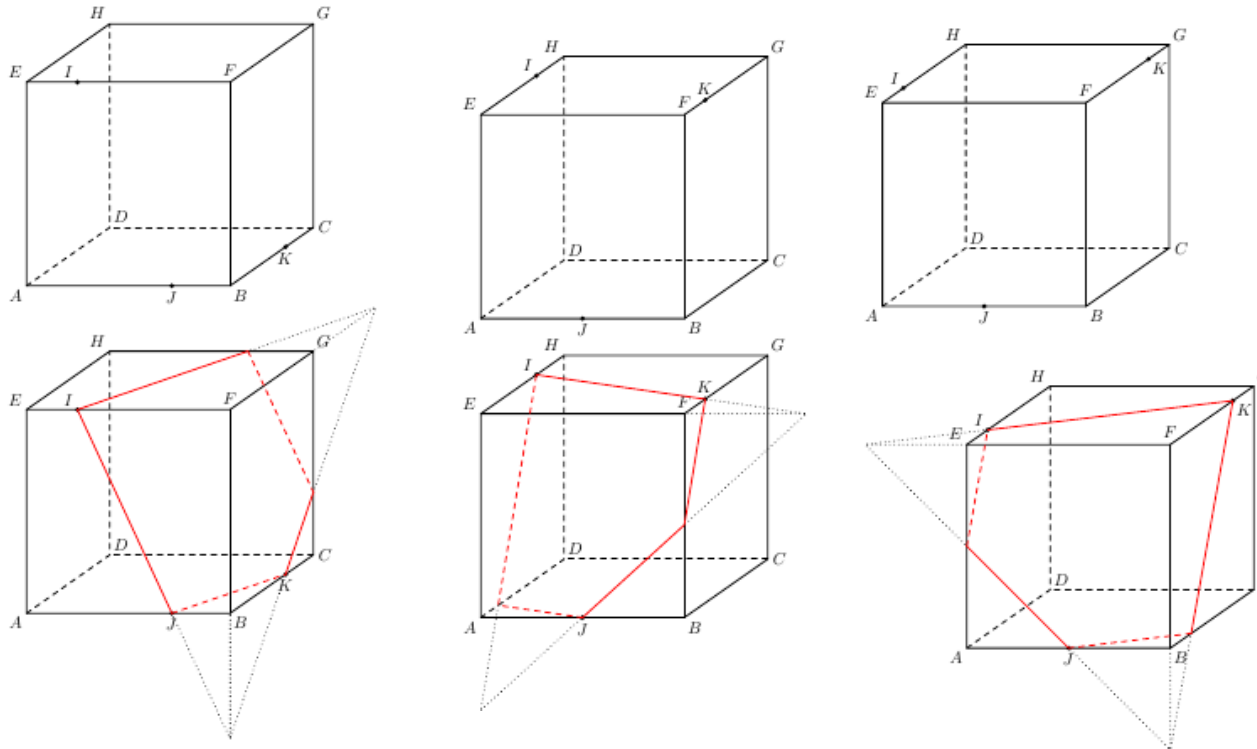
En classe de Terminale STD2A, on pourra reprendre cette approche dans le cadre de l'étude de l'ellipse, en lien avec les sections planes d'un cylindre de révolution.



Activité 6 : Sections d'un cube par un plan

Objectifs pédagogiques : consolider les connaissances de géométrie dans l'espace de seconde et les propriétés de la perspective cavalière.

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) dans les trois cas suivants:

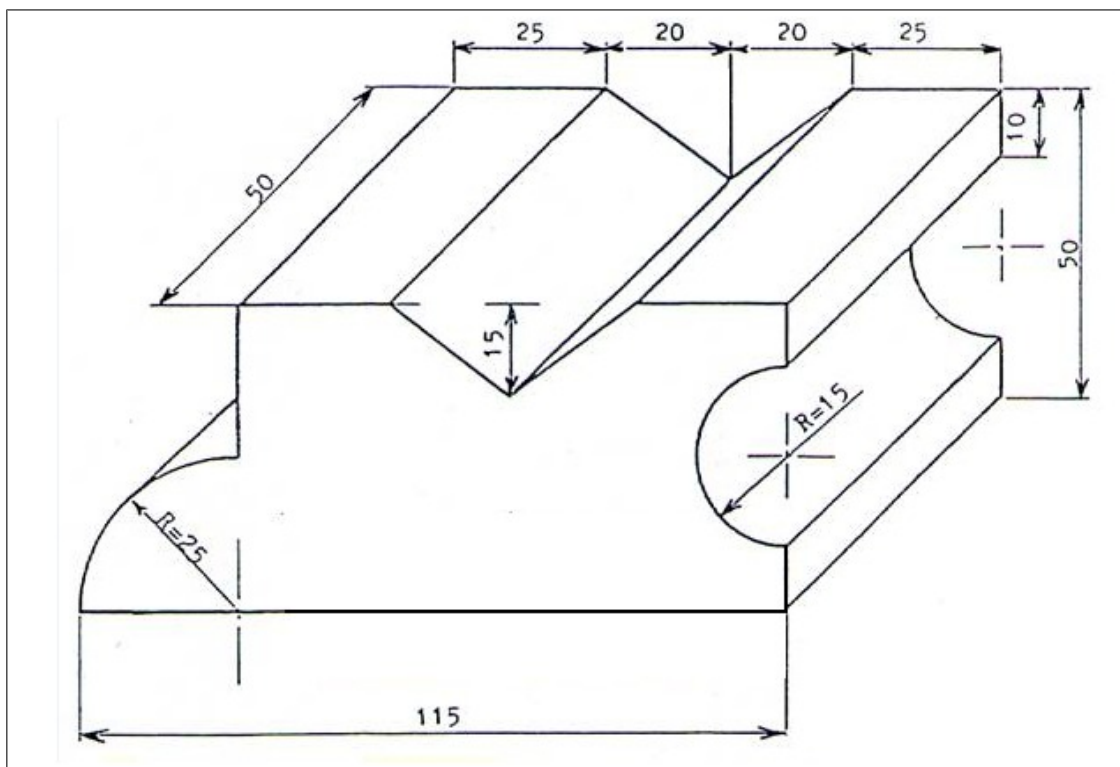


Déroulement de la séance : une heure en travail dirigé.

Activité 7 : exploiter une représentation en perspective cavalière.

Objectifs : mener une analyse critique d'un document, réinvestir et consolider les connaissances sur la perspective cavalière ; réaliser des calculs de volume à partir de volumes d'objets de référence.

Voici la représentation en perspective cavalière d'une pièce métallique (les dimensions sont données en millimètres).



Il s'agit de calculer le volume de cette pièce métallique, puis sa masse (densité de l'acier : $7,8 \text{ kg/m}^3$).

Déroulement possible de la séance : en dialogue avec la classe, une analyse de la pièce est faite, puis une stratégie de calcul est demandée aux élèves. Le travail qui s'ensuit peut alors être proposé en devoir maison.

Observations : le travail repose sur le principe de décomposition d'un solide en solides de référence « accolés » ; par solides de référence on entend ici des parallélépipèdes, prismes, cylindres de révolution⁸. Une difficulté supplémentaire surgit avec la nécessité de parler des solides virtuels qui correspondent aux parties évidées⁹ de l'objet (ici, un prisme et un demi-cylindre). Il peut être commode de rappeler le sens des opérations ensemblistes vues en classe de Seconde : union, intersection, différence.

Les élèves qui ont bien compris ces principes peuvent simplifier un peu le travail en rattachant le volume du prisme virtuel de section triangulaire à celui d'un parallélépipède rectangle (tout aussi virtuel) de section 20×15 .

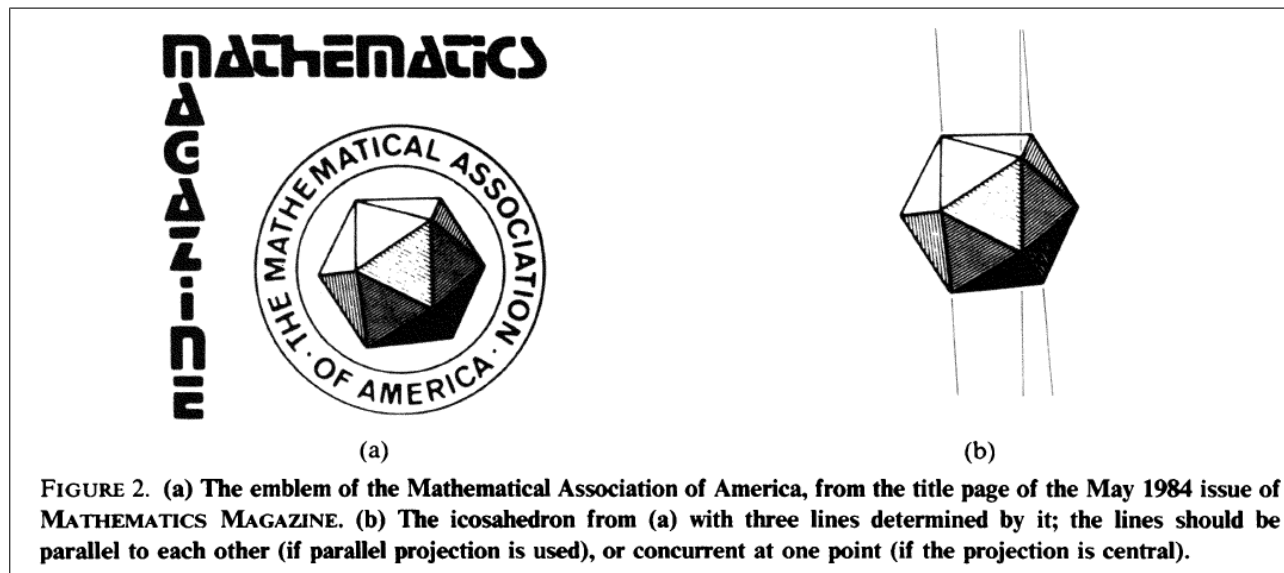
En classe de Terminale STD2A, ces questions seront reprises dans le contexte de la perspective centrale (capacité *représenter en perspective centrale un objet composé de solides simples accolés, une scène composée de quelques objets*).

⁸ Ils sont tous étudiés en classes de Quatrième et Troisième.

⁹ Dans les logiciels de modélisation volumique cette opération s'appelle *extrusion*.

Activité 8 : autour d'un logo

L'association mathématique des États-Unis (MAA)¹⁰ dispose d'un logo assez ancien qui fut au centre d'une controverse il y a une vingtaine d'années. Le géomètre Branko Grunbaum s'aperçut un jour que le logo de l'association ne pouvait correspondre à aucune perspective raisonnable ; ci-dessous un court extrait de son article, paru dans le numéro de janvier 1985 de la revue *Mathematics Magazine* :



L'association tenta à plusieurs reprises de corriger le logo, mais il fallut apparemment attendre 2002 pour qu'un logo à la fois correct et visuellement satisfaisant soit réalisé et appliqué sur toutes les publications de la MAA. Voici le logo actuel :



Observations : Il peut être commode de fournir aux élèves (sur papier) une vue agrandie et volontairement « fausse » (mais visuellement acceptable) de l'icosaèdre. Ce sujet appelle un travail de recherche documentaire ; en effet, bien que très simples et universellement répandus, les solides réguliers (de Platon) ne figurent pas au programme STD2A. On pourra proposer aux élèves de conduire leur recherche à partir des mots « solide » et « régulier », le but étant de les faire aboutir à une définition ou une description de l'icosaèdre.

On peut poursuivre l'activité avec la réalisation d'un patron (assemblage de 20 triangles équilatéraux) puis d'un modèle en carton de l'icosaèdre ; les parallèles apparaissent alors clairement.

Pour revenir à la question initiale, il conviendra de se demander si une perspective parallèle était attendue ... ou non !

¹⁰ <http://maa.org>