

Socle commun de connaissances et de compétences

Document ressource pour le socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège

Palier 3 (fin de scolarité obligatoire)

Compétence 3

Les principaux éléments de mathématiques
et la culture scientifique et technologique

mai 2011

Document ressource pour le socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège

SOMMAIRE :

I. Le programme de mathématiques et le socle	2
Introduction.....	2
1. La formation des élèves en mathématiques.....	2
2. L'évaluation au collège	3
II. La formation des élèves	4
1. Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes	4
a) Des problèmes pour découvrir un nouveau savoir.....	4
b) Des problèmes pour réinvestir les connaissances acquises.....	6
c) Résoudre un problème, c'est raisonner puis communiquer	9
d) Résoudre un problème c'est aussi maîtriser des techniques.....	11
e) Résoudre des problèmes, à la maison aussi !.....	12
2. Quelles stratégies pédagogiques pour favoriser l'activité mathématique de tout élève à tout moment ?	12
a) Quelques exemples de différenciation pédagogique	12
❖ Prévoir des questions « défi »	13
❖ Différencier les attendus ou exigences	14
b) Une progression spiralée pour donner du temps à tous	18
❖ Différer la phase d'institutionnalisation.....	20
❖ Le principe du « fil rouge » pour quelques concepts importants	20
❖ Préparer les apprentissages (évaluation diagnostique).....	20
ANNEXES RELATIVES A LA PARTIE « FORMATION »	22
Annexe 1 : productions d'élèves.....	22
Annexe 2 : propriété de Pythagore	23
Annexe 3 : productions d'élèves en géométrie.....	26
Annexe 4 : un exemple de protocole d'alternance maison-classe	27
Annexe 5 : exemple de questions « défi »	29
Annexe 6 : Exemple de protocole d'enseignement pour l'addition des relatifs	31
III. Contribution à l'évaluation de la compétence 3 du socle	32
1. Un attendu demeure : évaluer la maîtrise du programme.....	32
2. Donner place aux compétences dans l'évaluation	33
3. Comment faciliter une contribution des mathématiques à l'évaluation de la compétence 3 du socle commun ?.....	35
ANNEXES RELATIVES A LA PARTIE « EVALUATION ».....	56
Annexe 1	56
Annexe 2	58
Annexe 3	59
Annexe 4	63

I. Le programme de mathématiques et le socle

Introduction

Les nouveaux programmes de mathématiques du collège, publiés au B.O. hors-série n°6 du 28 août 2008, comme adaptation des programmes de 2007, se distinguent des précédents par la mise en évidence, à l'intérieur même des programmes, des exigences de formation du socle commun de connaissances et de compétences. Cette dualité entre l'ensemble des connaissances et capacités figurant au programme proprement dit et le sous-ensemble de celles qui relèvent – à un niveau donné – des exigences du socle commun (identifiées par des caractères romains dans le programme) crée des exigences nouvelles pour la formation et l'évaluation des élèves.

Il faut d'abord rappeler que ***l'acquisition du socle commun par tous les élèves est un objectif fixé*** par la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'Ecole :

« La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société »¹.

Cette acquisition constitue, en mathématiques comme dans les autres champs disciplinaires, ***la priorité pour la formation des élèves*** : le socle constitue le cœur du programme et, comme tel, sa maîtrise est indispensable à toutes les poursuites d'études comme à la vie en société.

Le présent document ressource a pour ambition de montrer, à la fois par des indications générales et par des exemples, comment l'enseignant de mathématiques peut gérer, en termes de formation et en termes d'évaluation, cette double exigence de l'acquisition du socle par tous les élèves et de l'avancement dans le programme.

1. La formation des élèves en mathématiques

L'acquisition des connaissances et compétences du socle commun est, d'après la loi, une priorité de l'enseignement au collège. Mais, en même temps, le programme dans son ensemble doit être dispensé aux élèves. C'est d'autant plus important que, dans de nombreux cas, les notions qui ne relèvent pas du socle à un niveau donné – celles qui figurent en caractères italiques étoilés dans les programmes – se retrouvent exigibles pour le socle commun l'année suivante : on a voulu ainsi laisser plus de temps aux élèves les plus fragiles pour acquérir ces capacités et il est donc indispensable qu'elles soient travaillées par tous dès l'année où elles sont introduites dans le programme.

Qu'en est-il des connaissances et capacités qui figurent en caractères italiques non étoilés dans le programme – et elles sont nombreuses en 3^e – c'est-à-dire qui font partie du programme de collège mais n'entrent pas dans le socle ? Comme il est dit plus haut, elles doivent être travaillées en classe puisque faisant partie du programme, mais ne peuvent être considérées comme une priorité.

La grille de références au palier 3 du socle et le document d'aide au suivi de l'acquisition des connaissances et des capacités du socle commun constituent des documents

¹ Loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École, n°2005-380 du 23 avril 2005, article 9.

pédagogiques à destination des enseignants pour leur permettre d'identifier précisément, à un niveau donné, les attendus (« éléments du socle exigibles ») pour l'acquisition du socle par les élèves, de disposer d'indications pour concevoir leurs évaluations et pour renseigner le livret de compétences. Mais elles constituent aussi, en liaison avec le programme, un outil précieux de cadrage pour la formation des élèves.

Quelles sont les exigences de formation induites par le socle ? Incontestablement, la résolution de problèmes y a une place importante. Ce n'est pas parce que cette exigence d'acquisition du socle commun concerne des élèves fragiles ou en difficulté en mathématiques que la formation qui leur est dispensée doit se cantonner dans l'apprentissage de techniques ou la mise en application de recettes. En effet, la résolution de problèmes est essentielle pour rendre opérationnelles les aptitudes à construire, notamment dans le cadre du socle. Elle occupe donc une place importante dans la formation, comme dans l'évaluation :

« ...les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne [...] La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. »²

Quelles sont donc les priorités, en termes de formation, pour l'acquisition des éléments de mathématiques inscrits dans le socle ?

- Incontestablement, la maîtrise du calcul réfléchi, inséparable du sens des nombres et des opérations.
- L'acquisition d'automatismes qui favorisent l'autonomie et l'initiative des élèves dans la résolution de problèmes et les mettent en confiance.
- La mise en place permanente de l'activité de raisonnement qui est l'essence même des mathématiques.

Il ne faut pas oublier, tout particulièrement dans le cadre de l'acquisition du socle commun, que pour certains élèves, apprendre peut prendre du temps et qu'il ne faut donc pas hésiter à revenir souvent et par petites touches sur les « fondamentaux » afin de laisser à chaque élève le temps d'acquisition dont il a besoin.

2. L'évaluation au collège

La résolution de problèmes doit constituer le vecteur principal de l'évaluation. Cela est vrai aussi bien pour l'évaluation de l'acquisition du programme que pour celle du socle commun : l'évaluation ne peut être pertinente que si elle porte sur les attendus.

Pour chaque niveau d'évaluation, la grille de référence du socle relative aux mathématiques est structurée en deux parties : une partie portant plus spécifiquement sur les connaissances, réparties dans les quatre champs du programme et une partie consacrée à la résolution de problèmes. Dans l'esprit des rédacteurs, les connaissances liées aux quatre champs du programme peuvent être évaluées dans des problèmes courts (exercices) mais ayant du sens.

Pour un professeur, il n'est pas possible de gérer, dans chaque classe et pour chaque élève deux systèmes d'évaluation, un pour le programme et l'autre pour le socle. Il est donc indispensable que les outils d'évaluation actuellement utilisés (devoirs de contrôle, évaluation diagnostique, travaux pratiques, travaux à la maison, utilisation des TICE) soient repensés de manière à permettre de mesurer à la fois la maîtrise du programme et l'acquisition des aptitudes du socle commun. Nous proposerons quelques pistes concrètes, expérimentées par des enseignants, susceptibles d'aider à relever le défi posé par cette double évaluation.

² Décret, relatif au socle commun, n°2006-830 du 11 juillet 2006.

II. La formation des élèves

Mettre en œuvre le socle commun consiste concrètement à faire vivre en classe deux objectifs de formation :

- Permettre aux élèves d'acquérir les mathématiques nécessaires à une poursuite d'études (autrement dit, le programme), objectif qui doit rester **l'ambition pour tous**.
- Donner à tous la culture mathématique nécessaire au citoyen (autrement dit, permettre aux élèves d'acquérir les connaissances et compétences du socle commun), objectif que l'on peut qualifier de **nécessaire pour tous**.

1. Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes

a) Des problèmes pour découvrir un nouveau savoir

Pour donner du sens aux mathématiques enseignées et cultiver chez les élèves le goût de faire des mathématiques, les programmes recommandent d'introduire certaines notions au travers d'une situation-problème. L'intérêt de cette démarche est de montrer la pertinence de l'outil construit pour la résolution du problème.

Les situations choisies dans ce cadre doivent permettre à **tout élève** de s'engager avec ses acquis du moment et donc, ne reposer que sur des consignes simples, n'exiger que des connaissances solidement acquises. Chaque élève est ainsi conduit à exercer les aptitudes dont il dispose et à en identifier les limites. La mutualisation des différentes procédures apparues dans la classe permet de présenter dans les meilleures conditions le savoir nouveau visé en lui donnant toutes les chances d'être perçu comme utile voire indispensable. Les élèves sont ainsi en état de le recevoir puis de se l'approprier.

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun et faire cohabiter harmonieusement tous les objectifs de formation visés, il est essentiel de veiller à ce que ce type de problème offre une véritable activité mathématique à tout élève sans oublier celui qui n'accèdera peut-être pas à la modélisation ou à la stratégie experte visée.

Exemple : des programmes de calcul pour introduire la résolution des équations du type $ax + b = cx + d$, notion qui ne fait pas partie des exigibles du socle commun.

Problème 1

Emma et Zoé ont chacune une calculatrice. Elles ont « tapé » le même nombre. Ensuite, Emma a appuyé sur les touches :

$\times$ 2 $+$ 3 $=$

et Zoé a appuyé sur les touches :

$-$ 2 $=$ $\times$ 4 $+$ 8 $=$

Surprise ! Elles obtiennent le même résultat !
Quel nombre ont-elles bien pu choisir ?

Tous les élèves peuvent s'engager dans l'étude de ce premier problème, ne serait-ce qu'en faisant des essais. Ils peuvent aboutir en tâtonnant puisque la solution est décimale. Certains peuvent recourir au calcul littéral et résoudre l'équation $2x + 3 = 4x$ de « façon artisanale » par exemple en mobilisant le sens des opérations ou en décomposant $4x$ en $2x + 2x$ pour constater que $2x = 3$. La mutualisation des différentes démarches permet l'enrichissement de chacun avant que le problème 2 ne soit abordé.

Problème 2

Yuna et Pierre ont chacun une calculatrice. Ils ont « tapé » le même nombre. Ensuite, Yuna a appuyé sur les touches :

$\times$ 2 $+$ 3 $=$

et Pierre a appuyé sur les touches :

$-$ 2 $=$ $\times$ 5 $+$ 8 $=$

Surprise ! Ils obtiennent aussi le même résultat !
Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

Tous les élèves peuvent encore s'engager dans l'étude de ce second problème en faisant des essais mais la méthode par essai-erreur atteint ses limites puisque la solution n'est pas décimale. Cependant, aucun élève n'est en échec, chacun étant en mesure d'approcher la solution. Les élèves qui n'avaient fait que quelques essais désordonnés lors de l'étude du problème 1 vont peut-être cette fois organiser leurs essais de façon efficace. Des élèves qui n'avaient pas été tentés de recourir au littéral pour le problème 1 peuvent y penser puisqu'ils ont entendu des camarades s'exprimer à ce sujet lors de la synthèse faite sur le problème 1. Poussés dans leur retranchement, les meilleurs peuvent utiliser des stratégies très proches de la stratégie experte. Chacun a donc fait un pas de plus.

Au cours de ce travail, les élèves en difficulté ne sont pas en échec. Mieux encore, ils peuvent consolider leur maîtrise de compétences complexes telles que « identifier un problème, ... élaborer une stratégie pour y répondre ». En outre, leur travail de « tâtonnement » est utile à tous puisqu'il donne du sens à ce qu'est une résolution d'équation.

Voir en annexe 1, des productions d'élèves pour le problème 2 et un exemple de résolution « artisanale » de $5x + 5 = 7x + 3$.

Une fois ce travail terminé, les élèves sont prêts à entendre l'exposé d'une stratégie experte de résolution des équations du type $ax + b = cx + d$. Pour tirer le meilleur profit du travail préliminaire, cet exposé de type magistral, doit prendre appui sur la diversité des productions « artisanales » des élèves.

Remarque : La méthode de résolution par essai-erreur, qui est à valoriser lors de l'apprentissage, doit l'être encore lors de l'évaluation. Il faudrait donc veiller à proposer dans ce cadre des problèmes dont la solution est parfois décimale et suffisamment « simple » pour être accessible sans avoir recours à une mise en équation non exigible pour le socle commun. Pour autant, cela ne veut pas dire qu'il faut s'interdire en évaluation de proposer des équations dont la solution n'est pas décimale.

Bien entendu tous les nouveaux savoirs ne seront pas nécessairement « construits par les élèves ». **Des apports de type plus transmissif peuvent être faits par le professeur.** Toutefois, dans une telle pratique, il est tout aussi indispensable de mettre chaque élève en activité en lui ménageant de vrais temps de réflexion mathématique. Tout élève doit être confronté à des questions du genre : « À quoi va servir ce que je viens de vous montrer ? » ; « À quoi vous fait penser cette situation ? » ; « Pourquoi peut-on faire appel à tel ou tel savoir antérieur ? » ; « Essayez de mener le début de ce calcul » ...

Exemple : voir en annexe 2 un mode d'introduction de la propriété de Pythagore qui ne propose pas d'approche expérimentale.

*Pour autant il est important, **pour gérer la double exigence du programme et du socle commun**, de continuer à valoriser des approches empiriques.*

En effet progressivement, au cours de leur formation, les élèves prennent conscience que les mathématiques permettent de réaliser un certain nombre de tâches sans avoir à « tâtonner ». À côté de cela, ils sont aussi convaincus, sans avoir toujours l'occasion ou la permission de le dire, que des méthodes empiriques permettent d'obtenir des résultats très satisfaisants en pratique. Par exemple, on peut voir des élèves déterminer le centre d'un cercle dans une excellente approximation, sans recourir au tracé des médiatrices. Le professeur de mathématiques perd souvent en crédibilité s'il ne fait aucune place à ces approches empiriques qui sont communément reconnues comme efficaces dans la vie courante (pour trouver le centre d'un disque en papier, on peut le plier en quatre, par exemple).

Au contraire, en amenant les élèves à comparer les deux types d'approche, il est possible de :

- valoriser des aptitudes qui relèvent du socle,
- montrer les limites de la résolution empirique (tout en lui reconnaissant une efficacité),
- plaider plus honnêtement et plus efficacement pour des méthodes mathématiques rigoureuses.

Par exemple, quand des élèves de 5^e doivent réaliser un patron d'un cylindre de révolution de 3 cm de rayon et 5 cm de hauteur, le premier obstacle à franchir est la détermination de la forme du patron. Il faut ensuite faire en sorte que le rectangle ait une longueur adéquate. Dans ce type de travail, on voit bon nombre d'élèves (s'ils y sont autorisés habituellement) découper et rouler du papier pour ajuster leur première conjecture et trouver, au brouillon, une forme globale pertinente. Ils se lancent alors dans une construction au propre pour découvrir finalement le problème de la longueur du rectangle. Certains reprennent alors un brouillon pour faire des calculs tandis que d'autres ajustent avec leurs ciseaux.

Toute cette approche empirique aura permis aux premiers d'aboutir, aux autres de prendre conscience du problème pour se préparer à la suite. Quand les deux types d'élèves s'expliqueront en plénière, un des enjeux sera la comparaison des méthodes. Les deux auront bien en main un cylindre en papier mais le premier pourra dire que, pour un prochain patron, il est certain de réussir du premier coup, sans aucun ajustement.

b) Des problèmes pour réinvestir les connaissances acquises

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est essentiel de veiller à ce que les problèmes proposés dans ce cadre offrent une vraie activité

mathématique à tout élève, y compris à celui qui ne maîtrisera peut-être pas une résolution complète.

Pour cela, il est nécessaire d'ouvrir les questions posées aux élèves.

Une façon de procéder, assez communément partagée, consiste à proposer des situations dont l'énoncé est suffisamment détaillé pour permettre à tout élève d'amorcer le travail.

L'énoncé ci-dessous (extrait du DNB 2007) illustre cette façon d'envisager les choses.

On donne un programme de calcul • Choisir un nombre. • Lui ajouter 4. • Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi. • Ajouter 4 à ce produit. • Écrire le résultat	1. On note x le nombre choisi. Exprimer en fonction de x le résultat de ce programme de calcul. 2. Démontrer qu'une autre écriture de $(x+4) \times x + 4$ est $(x+2)^2$. 3. Lorsque l'on applique ce programme de calcul à un nombre entier, obtient-on toujours le carré d'un nombre entier ? 4. a. Résoudre l'équation $(x+2)^2 = 1$. b. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?
---	---

Dans une telle version, les indications sont données dans le but d'aider les élèves à démarrer. Mais comme ces indications induisent une stratégie de résolution experte hors de portée de certains élèves (« passer à l'algèbre », « transformer des expressions du second degré », « résoudre des équations » ne sont pas des exigences du socle commun), elles ont souvent pour effet de priver totalement les élèves en difficulté de toute activité mathématique. Elles ôtent aussi aux bons élèves la possibilité de faire preuve d'initiative et de passer de façon autonome à l'algèbre, seul moyen dans cette situation d'accéder à la preuve.

Au contraire, ***ouvrir le questionnement favorise l'activité de chacun en augmentant la palette des stratégies accessibles.***

Voici une autre version du problème précédent à ***proposer en formation*** :

On donne un programme de calcul • Choisir un nombre. • Lui ajouter 4. • Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi. • Ajouter 4 à ce produit. • Écrire le résultat	<i>Seule question posée dans un premier temps :</i> Tester ce programme de calcul sur quelques nombres entiers. <i>Laisser les élèves faire des constats, proposer des conjectures, se poser la question de sa généralité.</i> <i>Éventuellement relancer une recherche par une seconde question :</i> On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?
---	---

Extraits de réponses d'élèves :

Je choisis le nombre 3 : le résultat du programme de calcul avec 3 est 5².
3 + 4 = 7
7 × 3 = 21
21 + 4 = 25

Je choisis le nombre 22 :
22 + 4 = 26
26 × 22 = 572
572 + 4 = 576
le résultat du programme de calcul avec 22 est 24².

b) Oui, lorsque l'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul, on obtient toujours le nombre choisi + 2 au carré.
c'est tout

Si le problème est énoncé sous une forme ouverte, tout élève a la possibilité de mettre en œuvre des capacités élémentaires de calcul, d'observer les résultats obtenus, d'émettre une conjecture, de faire la part entre ce dont on est sûr et ce qu'il faut prouver (quelques essais constituent-ils une preuve ?), d'élaborer une démarche par essais-erreurs, autant de capacités exigibles du socle commun.

Certains parviendront peut-être, comme l'extrait ci-dessus le montre, à formaliser un autre programme de calculs, plus court que le premier, qui donne toujours le même résultat que le premier, quel que soit le nombre auquel on applique ces deux programmes. Ils auront pu ainsi passer de façon autonome à l'abstraction.

Mais sans doute faudra-t-il accepter que certains élèves n'accèdent pas seuls à la stratégie de preuve, ce qui n'est pas grave dans la mesure où chacun a eu la possibilité d'avancer relativement à ses propres apprentissages et de construire des capacités attendues dans le cadre du socle commun. En outre, le travail d'exploration personnelle de la situation les a préparés à s'intéresser, au moment de la synthèse, aux preuves qui seront proposées par d'autres et à, peut-être, en tirer profit dans une expérience future.

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est important de valoriser différents niveaux de production. **En outre, permettre la coexistence de plusieurs niveaux de production au cours d'un travail, et même en garder la trace, est souvent très enrichissant pour la suite de la formation.**

Exemple en classe de cinquième : « Des programmes de calcul qu'on ne peut pas remonter. »

Deux exercices que l'on peut donner dès le début de l'année :

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre.

Tripler
Ajouter 4
Doubler
Retirer 4

- 1) Appliquer le programme au nombre 5.
- 2) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 809,2 ?
- 3) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 14 ?

À la question 2), on obtient en général trois types de production : des essais-erreurs un peu anarchiques ; des essais-erreurs très organisés (par dichotomie) ; des « remontées de programme » qui s'appuient sur le sens des opérations.

Lors de la plénière qui clôture ce premier travail, il est essentiel de valider les deux dernières méthodes, même si la « remontée de programme » apparaît plus économique. L'exposé de cette dernière permet à tous de retravailler sur le sens des opérations au niveau du socle. Mais, bien que reconnue par les élèves comme plus longue, la méthode par essais-erreurs mérite aussi d'être étudiée car elle a de l'avenir dans la classe.

En effet, à la question 3), la méthode par essais-erreurs n'est plus efficace puisque la solution n'est plus décimale. Toutefois elle retrouvera plus tard tout son intérêt, par exemple dans l'exercice suivant :

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre.

Doubler
Ajouter 3
Multiplier par 3
Ajouter le nombre de départ

- 1) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 25,1 ?
- 2) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 34 ?

Cette fois-ci, il n'est plus possible de « remonter le programme ». Si la méthode par essais-erreurs a bien été valorisée précédemment, les élèves pourront y avoir recours et répondre de façon exacte à la première question. Avec cette méthode, ils pourront aussi donner une solution approchée à la seconde question, même s'ils ne sont pas capables de recourir au calcul littéral pour aboutir complètement.

On pourra ainsi travailler avec tous sur un problème qui mènera certains seulement jusqu'à une modélisation algébrique.

c) Résoudre un problème, c'est raisonner puis communiquer

Apprendre à résoudre des problèmes, c'est d'abord et essentiellement **apprendre à raisonner**. C'est bien en ayant très régulièrement des occasions de raisonner que tout élève parviendra à construire des compétences élaborées telles que « être capable d'identifier quand une situation se prête à un traitement mathématique et élaborer une stratégie pour y répondre », capacités exigibles dans le cadre du socle commun.

Il est donc essentiel de solliciter, autant que faire se peut, la capacité à raisonner de chaque élève. Les problèmes dits « de recherche » sont tout à fait essentiels pour la développer. Cependant, ils n'occupent qu'un temps limité dans les apprentissages. Il est indispensable de permettre à l'élève d'exercer plus quotidiennement sa capacité à raisonner et de nombreuses occasions peuvent se présenter à chaque séance.

Un calcul réfléchi peut être l'occasion d'un véritable raisonnement.

Par exemple, dès la sixième, un élève qui doit calculer mentalement le produit $4 \times 1,75$ peut :

- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 1 unité et 3 quarts d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, transformer 12 quarts d'unité en cherchant, puisqu'il sait que 4 quarts d'unité font une unité, le nombre de fois 4 dans 12 et finir en ajoutant 4 unités et 3 unités.
- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 2 unités moins 1 quart d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction puis la vision fraction (4 quarts d'unité font une unité) et finir en soustrayant 1 unité à 8 unités.
- choisir d'effectuer deux multiplications successives par 2.

Dans tous les cas, l'intelligence du calcul est montrée. Dans ce contexte, en donnant le résultat puis en exprimant son raisonnement à l'oral, l'élève peut montrer, sans passage à l'écrit, qu'il a identifié le problème et a élaboré une stratégie pour le résoudre : le contrat est parfaitement rempli.

Outre le fait qu'un calcul réfléchi est pour tout élève une excellente occasion de raisonner, ***maîtriser la culture mathématique nécessaire au citoyen impose de façon très prioritaire la maîtrise du sens des opérations et du calcul*** (réfléchi c'est-à-dire calcul mental automatisé ou non ou bien instrumenté avec calculatrice ou tableur).

L'aptitude au croisement des différentes techniques de calcul, en particulier pour l'évaluation d'ordres de grandeurs, est essentielle dans la vie courante. Mais contrairement à l'attendu du citoyen de la société des années avant 1970, ***la priorité n'est plus la maîtrise du calcul posé.***

Apprendre à résoudre un problème c'est aussi ***apprendre à communiquer son raisonnement***, communication qui peut se faire par écrit mais aussi par oral. Apprendre à rédiger un raisonnement est bien un objectif de formation du programme mais ***la mise en forme écrite d'un raisonnement ne fait pas partie des exigibles du socle commun*** (voir l'en-tête des programmes).

Pour donner au raisonnement la place qu'il mérite il est essentiel de :

- ***dissocier les deux apprentissages*** (recherche et élaboration d'un raisonnement ou d'une preuve ; mise en forme du raisonnement ou de la preuve) car beaucoup d'élèves se croient incapables de faire des mathématiques alors que leur difficulté réside plutôt dans le fait de devoir produire un écrit conforme aux attendus du professeur. D'autres sont dans l'incapacité de montrer qu'ils raisonnent bien parce que l'évaluation d'un raisonnement passe le plus souvent par l'évaluation d'un écrit.
- ***valoriser toute expression écrite correcte d'un raisonnement.***

Exemple : voir en annexe 3 quelques productions d'élèves.

- ***développer les échanges oraux et écrits entre les élèves.***

Quand le professeur est le seul interlocuteur de l'élève dans un jeu de questions-réponses, l'élève peut difficilement se sentir en réelle situation d'argumentation. En effet, il sait très bien que le professeur connaît à l'avance les réponses aux questions qu'il pose et qu'il est capable de comprendre à mi-mot ce que disent les élèves. Dans ces circonstances, la motivation à plaider pour convaincre et à formuler son point de vue le plus clairement possible risque d'être minimale.

Au contraire, favoriser les échanges oraux et écrits entre élèves permet de les mettre plus facilement en véritable situation de communication. Les réactions des pairs poussent bien davantage l'élève à affiner ses arguments pour convaincre et à soigner ses formulations pour être compris des autres. Chaque objection d'un camarade est un défi qui mène souvent à développer une exigence plus grande dans les domaines du raisonnement et de la formulation.

Les échanges entre élèves peuvent se développer à l'oral comme à l'écrit. Bien des protocoles sont possibles. Par deux, ils peuvent échanger leurs productions écrites, annoter en donnant leur point de vue et renvoyer à l'auteur. En petits groupes de trois ou quatre, après une recherche individuelle, ils peuvent se mettre d'accord pour produire une argumentation collective.

Il est possible en classe entière d'animer des débats autour de l'examen de productions individuelles choisies ou de travaux de groupes, chaque élève pouvant dire ce qu'il ne comprend pas, les précisions qui manquent pour que l'écrit soit parfaitement clair, excellente ***façon de présenter aux élèves le travail de rédaction comme l'élaboration d'un écrit de communication se devant d'être compréhensible par tous ceux qui ont les mêmes savoirs.***

d) Résoudre un problème c'est aussi maîtriser des techniques

Un élève ne peut s'engager dans une résolution de problème s'il est freiné en permanence par des obstacles techniques. Développer et entretenir les automatismes en mathématiques, c'est donner à tout élève des outils fiables nécessaires pour être autonome dans la résolution de problèmes, c'est aussi libérer sa mémoire de travail et lui donner la possibilité d'exercer plus librement sa créativité.

En calcul, la maîtrise des quatre opérations, la connaissance de procédures de calcul mental rapides et efficaces, une bonne mémorisation des tables de multiplication sont nécessaires à la résolution de problèmes.

En géométrie, la mémorisation des propriétés de quelques figures de base (carré, losange,...) et une bonne habileté de construction de ces figures (à main levée, avec des instruments de dessin ou des logiciels de construction dynamique) facilitent la reconnaissance de figures de base dans une configuration donnée.

L'objectif de toute activité mathématique est bien la résolution de problèmes mais cet objectif ne peut être atteint sans un passage par un travail de « gammes », prélude à la mémorisation et à l'acquisition des automatismes indispensables. Ces automatismes, nécessaires à la résolution de problèmes s'acquièrent, s'affirment, s'entretiennent en effet par la pratique d'exercices référés à des tâches simples : calculs isolés, récitation de résultats mémorisés, construction de figures de base, ...

Néanmoins, ce travail des automatismes, conduit dans une classe où il faut gérer la tension entre les objectifs du programme et la nécessité de l'acquisition du socle commun pour tous, ne saurait se réduire à une multiplication d'exercices techniques imposés à tous les élèves. Imaginer qu'une stratégie de calcul assimilée grâce à trois exercices techniques d'application par une majorité d'élèves puisse être finalement assimilée par les autres grâce à la répétition des mêmes exercices qui se sont révélés à un moment donné inefficaces pour eux est illusoire.

Adopter une pédagogie du détour est souvent beaucoup plus efficace et procéder ainsi peut prendre des formes très diverses.

Par exemple :

- Revenir souvent et par petites touches sur un entraînement.
- Aider les élèves à prendre conscience que c'est parce qu'ils maîtrisent mal telle ou telle technique qu'ils sont freinés à un moment donné dans telle résolution de problème est une bonne motivation pour lancer un entraînement (collectif ou individualisé, en classe ou à la maison) et donner, à cet entraînement aussi, du sens dans l'apprentissage. Un élève qui a compris que pour résoudre des problèmes, il faut savoir raisonner, mais aussi maîtriser des techniques, puis enfin communiquer ne verra sans doute plus l'entraînement technique comme une simple corvée. On peut par exemple dire aux élèves : « Aujourd'hui, vous avez été arrêtés dans votre recherche parce que vous ne saviez pas bien faire ceci ou cela :

- je vous propose un entraînement... » ou « Tu as vu, tu es coincé là parce que tu ne sais pas bien faire ceci ou cela : je te propose de t'entraîner avec tel exercice ».
- Dans un souci de saisir toute occasion de solliciter une maîtrise technique et donc de faire acquérir des automatismes, on peut être tenté lors d'une résolution de problème en classe d'interdire l'usage de la calculatrice. Il peut se révéler plus efficace vis à vis de certains élèves de ne pas mélanger les deux objectifs. Dédouaner parfois les élèves d'une technique en leur permettant l'usage de la calculatrice peut permettre à tous de se centrer sur le problème. On reviendra sur la technique qui a fait défaut mais à un autre moment et en évitant tout acharnement.
 - Inciter les élèves à mettre en place des éléments de contrôle pour s'auto-valider. Ce peut être, par exemple, le test d'égalité dans un calcul littéral, un calcul approché pour vérifier un calcul exact, une mesure pour contrôler une démonstration en géométrie.

e) Résoudre des problèmes, à la maison aussi !

Quand le professeur donne des problèmes à résoudre à la maison, il se heurte souvent à des difficultés : des élèves rendent une copie presque blanche en affirmant qu'ils n'ont pas compris, d'autres recopient la solution d'un camarade, d'autres encore rendent des travaux de qualité si médiocre que leurs erreurs sont difficiles à exploiter. On peut alors avoir parfois la tentation de réduire ses exigences en renonçant aux problèmes au profit d'un entraînement technique ou en réduisant ce travail à la rédaction de solutions de problèmes cherchés en classe. Entraînement technique et travail de rédaction sont bien sûr deux tâches qui doivent trouver toute leur place dans le travail fait à la maison et à rendre sur feuille. Mais, il ne faut pas pour autant renoncer aux bénéfices d'un travail de recherche en temps non limité. Il est en effet possible de trouver des moyens d'accompagner les élèves dans leur recherche à la maison.

Comment accompagner les élèves dans la résolution de problèmes à la maison ?
Voir en annexe 4 un exemple de protocole d'alternance maison-classe.

2. Quelles stratégies pédagogiques pour favoriser l'activité mathématique de tout élève à tout moment ?

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est essentiel de respecter autant que faire se peut le rythme de chaque élève. Cela impose de laisser un temps suffisant à certains sans pour autant freiner les autres. Cela impose aussi de revenir souvent et par petites touches sur une notion afin de proposer souvent, d'éviter d'imposer et de laisser du temps au temps.

Pour autant la cohésion du groupe-classe reste fondamentale dans les apprentissages.
Une différenciation réussie est une différenciation qui permet de maintenir le groupe-classe dans un même projet global.

Il est possible d'y arriver, sans faire preuve de virtuosité pédagogique ou didactique, tout simplement en identifiant et en adoptant quelques gestes professionnels simples qui ont fait leur preuve et qui ne nécessitent qu'une solide organisation.

a) Quelques exemples de différenciation pédagogique

❖ Jouer sur les paramètres didactiques.

Pour ne pas marginaliser certains élèves relativement à l'acquisition du programme, il est essentiel de proposer très régulièrement des situations d'apprentissage visant les mêmes objectifs de formation pour tous. Par exemple, en classe de sixième ou de cinquième, le puzzle de Brousseau ou sa variante proposée par R. Charnay offre une situation

d'apprentissage permettant très efficacement de faire identifier aux élèves qu'agrandir chacune des pièces du puzzle ne revient pas à ajouter le même nombre à toutes les mesures mais à multiplier toutes les mesures par un même nombre. Toutefois, il est possible en jouant sur les données du problème de différencier l'exigence requise au niveau de la maîtrise technique. Proposer à certains élèves des agrandissements du type « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 16 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres « le côté qui mesure 7 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi » ne nécessite pas le même degré de maîtrise au niveau des nombres. Le fait que les uns aient un coefficient d'agrandissement entier ou décimal, alors que les autres ont un coefficient d'agrandissement non décimal, ne nuit pas à l'objectif principal de formation tout en permettant de tenir compte de la maîtrise ou non de la notion de quotient.

À d'autres moments, modifier les paramètres didactiques d'un problème peut faciliter pour les uns la mise en œuvre de stratégie personnelle, inciter les autres à mettre en œuvre une stratégie experte.

❖ **Prévoir des questions « défi »**

Le temps nécessaire à la résolution d'un problème est très variable d'un élève à l'autre. Or la gestion de la classe devient vite très compliquée quand la moitié des élèves n'ont pas achevé le travail de recherche à fournir sur les situations considérées comme incontournables tandis que l'autre moitié a déjà terminé les résolutions attendues et s'impatiente. Classiquement, on demande alors aux plus rapides de rédiger soigneusement leurs résolutions, on leur propose d'aider les autres ou encore on leur donne trois exercices du livre. Toutes ces solutions, qui ne se résument pas à permettre aux plus rapides d'avancer plus vite dans ce qui *in fine* sera attendu de tous (ce qui ne ferait qu'augmenter les écarts entre les élèves), peuvent bien sûr être mises en œuvre avec profit. Une autre pratique efficace consiste à exploiter ces temps pour permettre aux élèves les plus à l'aise de se confronter à des questions « défi » qui ne seront pas proposées à tous et sur lesquelles il n'y aura pas mise en commun.

Par exemple, en quatrième, on propose à chaque élève de résoudre les trois problèmes suivants :

Des histoires d'héritage ...

- 1) Hélène hérite des deux septièmes de la fortune de sa tante qui s'élève à 56 000 €.
Quelle somme d'argent reçoit Hélène ?
- 2) Pierre, Julie et Christine se partagent la fortune de leur père.
Pierre reçoit le tiers de cette fortune, Julie les deux cinquièmes et Christine hérite du reste.
Quelle fraction de la fortune de son père représente la part de Christine ?
- 3) Jean hérite des cinq septièmes de la fortune de sa grand-mère : il reçoit 20 000 €.
À combien s'élève la fortune de sa grand-mère ?

Ces trois problèmes sont les trois versions possibles d'un problème de changement d'états. Dans le premier, l'état initial et le mode de changement d'état sont donnés. Dans le second, il s'agit de trouver le mode de changement d'état. Dans le troisième, le mode de changement d'état et l'état final sont connus. Un élève qui a bien travaillé ces trois problèmes a eu un temps d'apprentissage pertinent.

Il est possible de proposer à ceux qui ont résolu ces trois problèmes de chercher le suivant. Ce problème mobilise les mêmes savoirs mais sa résolution nécessite une maîtrise plus grande.

- 4) Georges, Michel et Claude se partagent la fortune de leur oncle.
Georges reçoit les sept neuvièmes de la somme totale et Michel le sixième.
La part de Claude est de 5 000 €.
À combien s'élève la fortune de l'oncle ?

Pour les plus rapides on peut encore proposer la résolution du problème suivant :

- 5) Une enquête sur l'apprentissage de l'allemand et de l'anglais chez les élèves de quatrième fait ressortir que :
- cinq douzièmes des élèves interrogés n'apprennent pas l'allemand ;
 - 500 élèves apprennent à la fois l'allemand et l'anglais ;
 - un quart des élèves interrogés n'apprennent pas l'anglais ;
 - un douzième des élèves interrogés n'apprennent ni l'allemand ni l'anglais.
- Combien d'élèves ont-ils été interrogés au cours de cette enquête ?

L'objectif étant de rester toujours disponible pour aider les élèves en difficulté, il est important de prévoir une aide écrite que l'on peut donner à des élèves rapides au cas où leur problème résiste trop.

Si, en cours de séance, on souhaite faire une mise en commun sur l'un ou l'autre des trois premiers problèmes, il va de soi que tous les élèves prennent part au débat. On peut aussi, à l'issue de la séance, choisir de demander aux uns de rédiger, à la maison, les solutions des trois premiers problèmes, aux autres celle du quatrième et enfin aux plus rapides celle du cinquième. La synthèse collective qui aura lieu la séance suivante ne portera bien sûr que sur les trois premiers problèmes. Les annotations du professeur seront donc plus importantes pour le 4) et le 5).

Quand on pratique une telle différenciation, il est bon de la présenter à la classe pour lui donner du sens. Il faut, en effet, éviter qu'elle soit ressentie comme porteuse de ségrégation : le professeur peut expliquer que ce protocole permet à chacun de travailler à son rythme et le rend, lui, plus disponible pour les élèves en difficulté.

On peut aussi parfois faire en sorte que les questions « défi » posées à certains soient quand même l'occasion d'une mise en commun collective, ce qui atténue beaucoup l'impression de clivage dans la classe (voir un exemple en annexe 5).

La force de cet exemple par rapport au premier est de maintenir davantage le groupe-classe dans un même projet global tout en faisant travailler chacun à sa mesure.

Dans les deux exemples présentés en annexe, **les élèves en difficulté ont un vrai temps pour travailler des aptitudes du socle, même dans un apprentissage « hors socle »³.**

❖ **Différencier les attendus ou exigences**

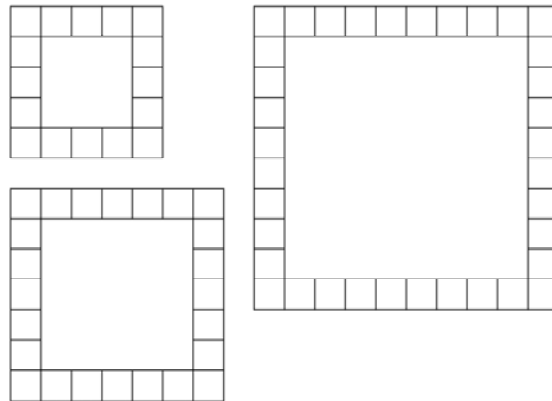
Proposer des problèmes, sans induire *a priori* de réponse experte, permet souvent la coexistence de plusieurs niveaux ou plusieurs formes de réponses. Ce type de différenciation ne demande pas de protocoles ou de préparations très compliqués puisque

³ Voir Annexe 5.

tous les élèves travaillent au même moment sur la même tâche. Il s'agit simplement d'ouvrir le questionnement pour que chacun soit capable, d'une manière ou d'une autre, de remplir le contrat et de sentir qu'il a comblé les attentes.

Par exemple, ce sera possible dans l'exercice de dénombrement ci-dessous, parce que les attentes sont d'emblée différenciées :

Pierre joue avec des mosaïques de couleur.
Il dispose ses mosaïques pour obtenir des « carrés ».



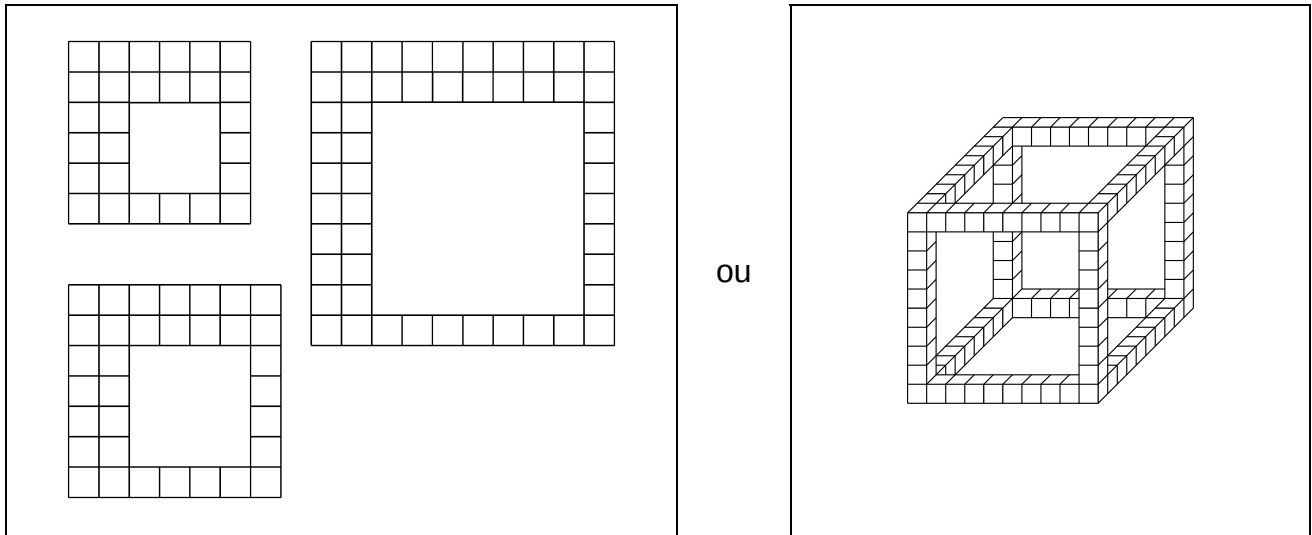
Il se demande en jouant s'il peut savoir à l'avance combien de mosaïques il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.
Pouvez-vous l'aider ?

Dans l'énoncé, on ne dit pas « Appelons n le nombre de mosaïques sur un côté. Établir une formule qui donne le nombre de mosaïques sur un carré de côté n ». On attend, en effet, que certains utilisent une méthode discursive, que d'autres élaborent un modèle algébrique et que d'autres encore utilisent toutes sortes de formes intermédiaires.

Voici quelques productions d'élèves :

1. On prend le nombre des mosaïques d'un côté, puis on le multiplie par 4 (car il y a 4 côtés égaux dans un carré) puis on enlève 4 à cause des angles droits.	2. (nombre de carreaux par côté $\times 4$) - 4 = nombre de carreaux dont on aura besoin pour faire le carré exemple: 40 carreaux de côté = $(40 \times 4) - 4 = 156$ il aura besoin de 156 pour faire les 4 côtés Explication: les 4 côtés du carré. $(40 \times 4) - 4 = 156$ nombre de carreaux par côté les carreaux comptés plusieurs fois. nombre de carreaux dont ils auront besoin
3. A = nombre de carreaux par côté $A \times 4 - 4 =$ nombre total de carreaux sur les 4 côtés ex. $40 \times 4 - 4 = 156$	

Lors de la phase de synthèse, le professeur peut convenir que les trois productions sont bien la preuve que le contrat est rempli. La différenciation possible des attentes fait qu'à ce stade, tous les élèves sont en réussite. Pour autant, la classe n'en reste pas à ce constat. En effet, la comparaison des différents types de productions est un des éléments moteurs de l'apprentissage. Elle va enrichir les représentations de chacun et provoquer de l'émulation. La simultanéité de ces productions de natures différentes s'avère souvent extrêmement formatrice pour tous. On peut le mesurer, en proposant, à distance, une situation analogue :



On constate alors que chacun a pioché dans les idées des autres pour faire évoluer sa seconde production : ceux qui avaient produit du discours la première fois proposent des embryons de formules, ceux qui avaient des pseudo-formules formalisent mieux, ...

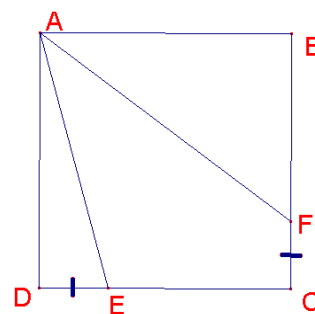
❖ **Gérer des états d'avancement divers dans la réalisation d'une tâche complexe**

Gérer la double exigence du programme et du socle commun, maintenir la cohésion du groupe classe, faire acquérir solidement à tous les attendus du socle commun nécessitent de confronter régulièrement tous les élèves à des tâches complexes. Il faut alors prévoir des protocoles permettant de gérer des états d'avancement divers dans la réalisation de cette tâche complexe.

Toutefois faire vivre en classe une recherche de problème ouvert surtout si cette recherche nécessite de s'inscrire dans une certaine durée (une séance par exemple), **peut générer des problèmes de gestion de classe** qu'il est préférable d'anticiper.

Par exemple, imaginons de poser le problème suivant dans une classe de troisième.

Construis un carré ABCD de côté 10 cm.
 Choisis un nombre compris entre 1 et 10 et place le point E sur le segment [DC] tel que la longueur du segment [DE] soit égale à ce nombre.
 Construis le point F du segment [BC] tel que $DE = FC$.
 Calcule l'aire du quadrilatère AECF.
 Compare ton résultat avec celui de ton voisin.
 Quelle conjecture peux-tu faire ?
 Démontre cette conjecture.



Il ne va pas falloir beaucoup de temps à certains élèves pour faire la figure, calculer l'aire du quadrilatère, constater qu'ils obtiennent 50, comme d'autres camarades aussi rapides qu'eux, et se lancer dans l'élaboration d'une stratégie permettant de prouver que cette aire est bien toujours égale à 50 (stratégie qui peut se révéler être un passage à l'algèbre ou une comparaison des aires de deux triangles tels que AFC et ADE ou).

Pendant ce même laps de temps, certains élèves n'auront peut-être eu que la possibilité de faire la figure, de constater que AECF n'est pas une figure géométrique classique et qu'en conséquence aucune formule connue n'est opérante pour donner immédiatement cette aire.

Dans une première confrontation des productions individuelles, si on n'y prend pas garde, les premiers peuvent très vite enlever toute occasion aux seconds de revisiter des notions fondamentales exigibles dans le cadre du socle commun (aire d'un triangle rectangle, sens des opérations, calculs), d'élaborer un raisonnement (comment calculer l'aire de ce polygone ?), de construire des aptitudes importantes telles que faire preuve de logique et de rigueur et donc distinguer ce dont on est sûr de ce qu'il faut prouver.

En effet, dans une classe, les réponses se propagent vite et si certains élèves savent comment calculer l'aire du quadrilatère et sont persuadés que cette aire est toujours égale à 50, ils risquent fort d'aider leurs camarades de la pire façon à savoir en leur donnant simplement les réponses : « pour calculer l'aire tu fais comme ceci », « mais si, cette aire elle fait toujours 50 », « tu n'as qu'à poser $DE = x$ » !

Obtenir que les bons élèves ne « mangent » pas les problèmes des plus lents, faire en sorte que tous les élèves s'impliquent dans une recherche, qu'ils aient véritablement le temps d'avancer sur leurs difficultés, sans que pour autant les plus rapides soient freinés dans leur activité, cela nécessite un peu d'anticipation et d'organisation.

Un exemple d'organisation possible :

On peut, dans un premier temps, éviter de donner le problème dans toute sa globalité. Si la question de la généralité n'est pas posée d'emblée, les élèves plus rapides risquent moins de bousculer les autres. En outre, il est tout à fait formateur de permettre aux élèves de poser eux-mêmes la question de la généralité.

Temps n° 1 : travail proposé aux élèves à la maison.

Construis un carré ABCD de côté 10 cm.
Choisis un nombre compris entre 1 et 10 et place le point E sur le segment [DC] tel que la longueur du segment [DE] soit égale à ce nombre.
Construis le point F du segment [BC] tel que $DE = FC$.
Explique comment tu ferais pour calculer l'aire du quadrilatère AECF.

Temps n° 2 : mise en commun des difficultés rencontrées.

Les élèves sont invités à dire ce qui leur a posé problème par petits groupes ou en plénière. Les autres fournissent des aides pour trouver tout seul et surtout pas la réponse (avec l'habitude, les élèves savent de mieux en mieux trouver les aides adéquates, sans dévoiler la solution : ce travail est aussi très formateur). Le professeur n'intervient qu'en dernier lieu.

Temps n° 3 : travail à la maison.

Les élèves qui n'ont pas réussi la première fois reprennent le travail à la maison pour un autre nombre.

Temps n° 4 : mise en commun.

Une conjecture a peut-être déjà été exprimée en aparté par quelques élèves. La question de la généralité est enfin posée collectivement. Il convient d'accepter que certains élèves ne parviennent pas seuls à la preuve.

b) Une progression spiralee pour donner du temps à tous

L'organisation en spirale de la progression était déjà recommandée dans les programmes mais l'apparition du socle commun en renforce notablement les avantages.

1. *Elle permet de gérer la priorité à donner aux aptitudes du socle sur celles du programme qui sont hors socle.* Une progression spiralee offre sur chaque thème des approfondissements successifs proposés à plusieurs reprises durant l'année. Le premier épisode de travail sur un thème donné peut viser en priorité les aptitudes du socle et réserver pour la suite les autres objectifs fixés par le programme sur ce thème. Une telle organisation appliquée à différents thèmes garantit la construction des aptitudes du socle dans le travail de l'année.
2. *Elle permet de mettre en place une évaluation, voire une validation, des aptitudes respectant les rythmes d'apprentissage individuels des élèves.* En multipliant les réinvestissements sur différents thèmes, elle favorise l'entretien et la consolidation dans la durée des aptitudes acquises. Mais elle permet aussi de multiplier et de renouveler au fil du temps les occasions d'évaluation d'aptitudes que certains élèves mettent plus de temps que d'autres à construire.

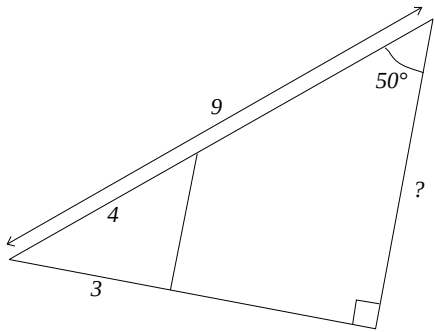
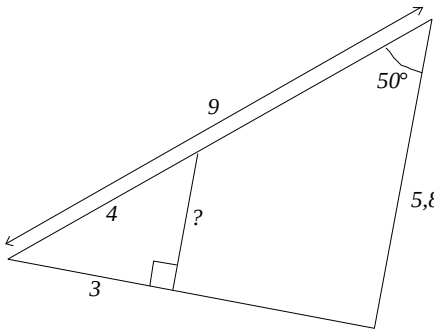
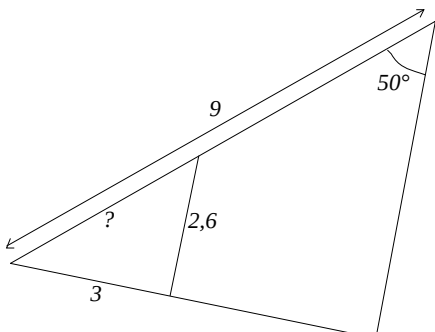
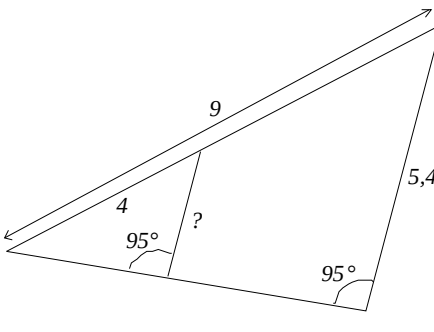
Quelques manifestations d'une progression en spirale.

❖ L'entraînement au quotidien, à petites touches.

Une préconisation forte consiste à proposer, lors de toute séance, un temps consacré à des activités rapides. Une telle pratique permet de traiter certaines notions dans la durée (sans y consacrer au total plus de temps) ce qui facilite aussi une mobilisation fréquente de ces notions.

Exemple : quelques « activités mentales ».

Par exemple, pour poursuivre l'apprentissage de théorèmes de géométrie en entraînant tous les élèves à reconnaître leur champ d'application et à les utiliser en acte, on peut proposer, au début de plusieurs séances, éventuellement espacées :

Jour 1 	Jour 2 
Jour 3 	Jour 4 

Chaque activité se mène en deux temps brefs.

Temps 1 : comment calculer la longueur demandée ? (trois outils sont disponibles : Pythagore, Thalès, le cosinus)

Mise en commun argumentée.

Temps 2 : faire le calcul à 0,1 près.

Pour ces activités rapides, aucune rédaction n'est demandée. Les élèves produisent un résultat sur leur cahier de recherche. La correction est orale avec sollicitation des élèves (Untel ? Qui n'est pas d'accord ? Pourquoi ? Qui a fait autrement ? Qui peut redire comment ça marche ?) ou alors très magistrale, juste pour entraîner et entretenir un apprentissage, le professeur redonne éventuellement des conseils.

Ces activités rapides peuvent aussi être l'occasion d'une évaluation formative pour le professeur et formatrice pour les élèves.

Par exemple, lorsque les élèves viennent d'apprendre à additionner deux nombres décimaux relatifs en 5^e (voir annexe 6), chaque jour en début d'heure, avant de faire un autre travail – à caractère géométrique – on peut proposer :

- **Jour 1 :** cinq sommes de deux termes.

Les élèves se notent pour eux-mêmes. Ils mesurent ainsi l'avancée de leurs apprentissages et le professeur peut engager, anonymement, ceux qui ont moins de 4/5 à s'entraîner à la maison.

- **Jour 2** : cinq sommes de deux termes.

Les élèves se notent à nouveau. Le professeur fait un sondage en comptant le nombre de notes supérieures ou égales à 4. Il réalise ainsi, en deux minutes une évaluation formative indispensable pour son pilotage. Là encore, il engage les élèves en difficulté à un travail personnel. Il peut aussi demander qui pense avoir progressé du jour 1 au jour 2 : c'est une façon de reconnaître les avancées des élèves et d'encourager les plus en difficulté à poursuivre leurs efforts à la maison.

- **Jour 3** : des sommes à trous.

C'est encore l'occasion d'un entraînement pour l'addition, mais aussi une préparation pour l'apprentissage futur de la soustraction.

- **Jour 4** : deux sommes de cinq termes avec des opposés.

❖ ***Différer la phase d'institutionnalisation***

Institutionnaliser trop tôt a souvent pour effet de donner l'impression à l'élève qu'il s'agit ensuite d'appliquer une recette. Il faut en effet beaucoup se méfier des recettes, car une recette n'est pas pour un élève le moyen de comprendre plus vite. Cela devrait rester pour tout élève le moyen d'aller plus vite une fois qu'il a compris.

De plus, un objectif majeur consiste à mettre à tout moment tout élève en activité mathématique, alors qu'appliquer une technique non comprise ne peut être considéré comme une activité mathématique.

Voir en annexe 6 un exemple de protocole d'enseignement pour introduire l'addition de deux nombres relatifs en 5^e.

❖ ***Le principe du « fil rouge » pour quelques concepts importants***

Exemple : la proportionnalité – pas de « chapitre » mais des « temps autour de la proportionnalité » en multipliant les occasions de travail sur ce thème.

❖ ***Préparer les apprentissages (évaluation diagnostique)***

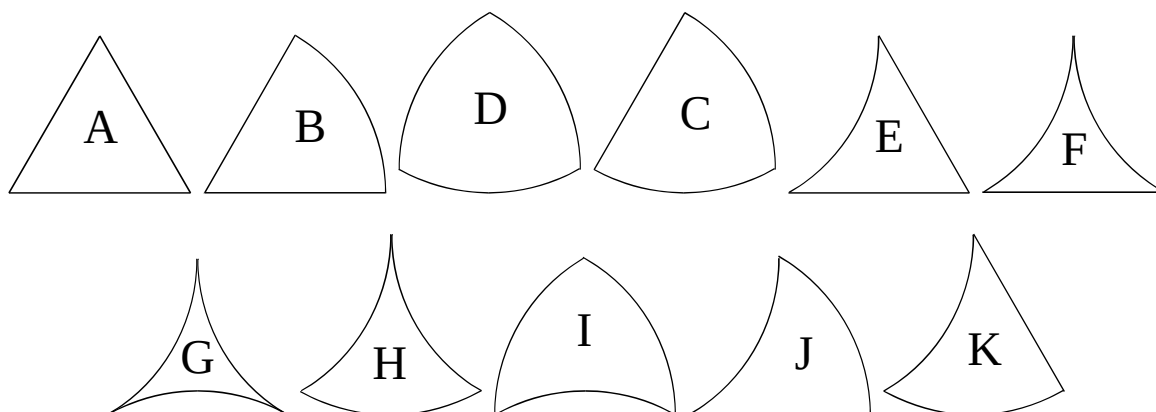
Tout nouvel apprentissage nécessite que les élèves disposent d'un certain nombre d'acquis préalables. Quand le professeur fait travailler les élèves pour construire un nouveau savoir, si certains ne maîtrisent pas ces acquis nécessaires pour avancer, ils se heurtent à des obstacles qui n'ont rien à voir avec ceux dont le franchissement est susceptible de générer le nouvel apprentissage. La gestion simultanée des élèves qui sont vraiment sur la question du jour et de ceux qui ne peuvent pas encore l'envisager est alors quasiment impossible. Il est essentiel de veiller à n'être pas contraint soit d'arrêter tout le monde pour faire des rappels dont certains n'ont pas besoin, soit de poursuivre au risque que le nouvel apprentissage ne fasse pas sens pour ceux qui ne sont pas entrés dans la tâche. Pour ce faire, il faut anticiper et préparer l'avenir.

Par exemple, dans une introduction du théorème de Pythagore à l'aide d'un puzzle, les élèves ont besoin de maîtriser le concept d'aire et de le distinguer de celui de périmètre. Deux à trois semaines avant de travailler sur ce théorème, on peut donc envisager les activités mentales suivantes, pendant deux ou trois minutes au début de plusieurs séances :

- Représenter sur quadrillage deux figures qui ont même aire et des périmètres différents.
- Représenter sur quadrillage deux figures qui ont même périmètre et des aires différentes.
- Le périmètre d'un carré vaut 36 cm. Son côté vaut donc ...
- L'aire d'un carré vaut 36 cm^2 Son côté vaut donc ...

On peut aussi donner un exercice à la maison :

Les pièces du Curvica Triangulaire s'obtiennent à partir d'un triangle équilatéral dont on peut choisir de creuser, bomber ou laisser en l'état chaque côté :



Classer ces pièces dans l'ordre croissant de leurs périmètres, puis dans l'ordre croissant de leurs aires.

Cette préparation aura un double intérêt : elle permettra de travailler sur les prérequis de l'apprentissage du théorème de Pythagore, mais aussi de faire progresser les élèves sur des aptitudes du socle.

Ces précautions rendront les élèves plus disponibles pour la nouveauté et s'il en reste quelques-uns en difficulté sur la notion d'aire, ils seront peu nombreux et le professeur pourra alors les accompagner de façon spécifique.

ANNEXES RELATIVES A LA PARTIE « FORMATION »

Annexe 1 : productions d'élèves

Productions d'élèves pour le problème 2

$a \times 2 + 3 = 2a + 3,$ $(a-2) \times 5 + 8 = 5a - 10 + 8 = 5a - 2 =$ $2a + 3a - 2.$ <u>$2a + 3$ doit être égale à $2a + 3a - 2.$</u> Cela est égale. Le reste: 3 doit être égale à $3a - 2.$ Le $3a$ doit être égale a 5 car $5 - 2 = 3.$ Il faut faire $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ donc $a = \frac{5}{3}.$	$a =$ n'importe quel nombre. $(a-2) \times 5 + 8 = 5a - 10 + 8$ $= 5a - 2$ $\frac{5a}{5} - 2$ $\frac{2a}{1} + 3$ $\frac{5a}{5} - 2 = 3$ $\frac{5}{3} \approx 1,6666$ $2 \times \left(\frac{5}{3}\right) + 3 = 5 \times \frac{5}{3} - 2 \approx 6,333 > 3 > 3$ Donc "a" est $\frac{5}{3}$ pour pouvoir trouver le même nombre dans les 2 formules.
---	---

Un exemple de résolution « artisanale » de $5x + 5 = 7x + 3$ avant la présentation de la résolution experte par le professeur.

valid
Elodie | On développe les 2 opérations en essayant de les simplifier, pour ça on soustrait le même nombre(s) des 2 côtés.

ex: $5x + 5$ développée $\rightarrow 5x + 3 + 2$
 $7x + 3$ développée $\rightarrow 5x + 2x + 3$

$\frac{5x}{5x} + 3 + 2$ = il reste $2x$ et 2
 $\frac{5x}{5x} + 2x + 3$

$2x = 2$
 $x = \frac{2}{2} = 1$
 $2 \times 1 = 2$

On applique l'opération à l'envers

Donc la valeur de x est 1

on vérifie

$5 \times 1 + 5 = 10$
 $7 \times 1 + 3 = 10$

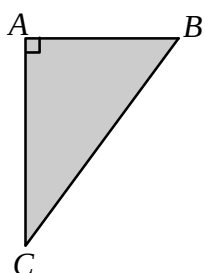
Annexe 2 : propriété de Pythagore

Un exemple de stratégie pédagogique élaborée dans le but de construire les acquis sur la propriété de Pythagore sans chercher à proposer une approche expérimentale (dans le document d'accompagnement de géométrie p. 14, il est expliqué qu'une telle approche n'est pas vraiment possible). Le but visé consiste aussi à laisser le plus de place possible pour une véritable activité mathématique de chaque élève.

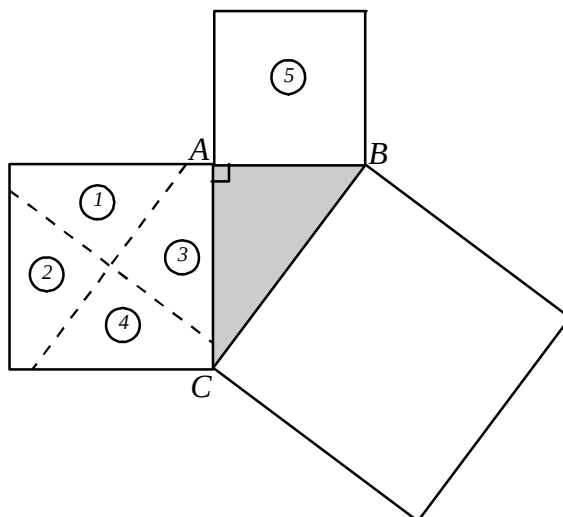
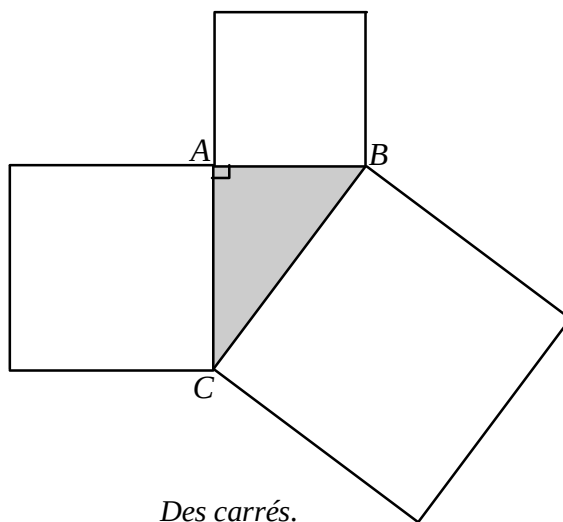
Durée de la séquence (temps indicatif : 100 min)

Phase 1 : récit du professeur (comme une histoire).

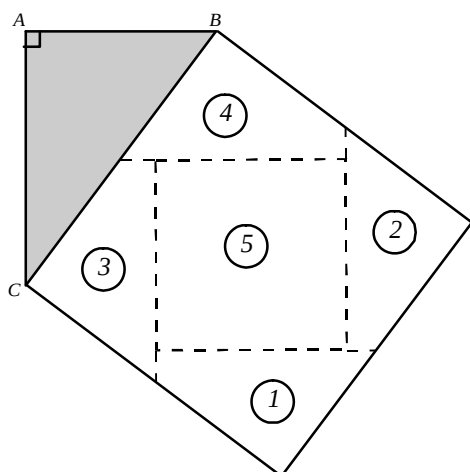
Une célèbre propriété des triangles rectangles



Un triangle rectangle quelconque.



On partage le carré « moyen » en quatre parties.



Des mathématiciens ont prouvé que l'on peut « recouvrir » parfaitement le grand carré avec les deux autres carrés.
Ils en ont déduit une propriété concernant les côtés des triangles rectangles.

L'assemblage du puzzle est montré à l'aide d'un appareil de visualisation collective. Rien de plus n'est dit. L'exercice suivant est aussitôt proposé.

Phase 2 : les élèves s'emparent du récit pour construire un nouvel outil.

Exercice

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm.

À quoi peut te servir la découverte des mathématiciens dans cette situation ?

Travail individuel strict + concertation-consensus en groupe + plénière.

Lors de la plénière, le triangle ABC et les trois carrés du puzzle sont dessinés au tableau, à main levée. Le lien entre l'idée de "recouvrement parfait" et l'égalité des aires est établi. Les aires sont notées dans les deux plus petits carrés, leur somme dans le plus grand. Le côté du grand carré est trouvé mentalement, bien sûr sans recourir à la calculatrice. L'occasion de remédier à la confusion entre « aire et périmètre » se présente : la division de 25 par 4 et non pas la recherche d'un nombre dont le carré est 25.

Pour commencer le chemin vers $\sqrt{a}$, la formulation « quel est le nombre positif qui a pour carré 25 ? » est utilisée.

On reprend l'exercice avec

a) $AB = 2,8$ cm et $AC = 9,6$ cm

b) $AB = 5$ cm et $AC = 12$ cm

puis c) $BC = 5,8$ cm et $AC = 4,2$ cm.

Travail individuel avec entraide si nécessaire.

Les élèves font des croquis avec les carrés (souvent parce qu'ils l'ont vu faire lors de la plénière précédente). S'ils ne le font pas et restent en difficulté, on peut les engager à le faire. Certains se libèrent progressivement des croquis, d'autres pas.

Ces croquis vont constituer des images mentales fortes pour la suite : l'élève est engagé à ne pas oublier d'où viennent les carrés des nombres, à tenir des raisonnements du type « on ne peut pas recouvrir le petit carré avec le moyen et le grand » et donc à consolider le sens de la soustraction.

Mobiliser la propriété ne repose pas de façon nécessaire sur l'application d'une identité qui peut se révéler trop abstraite et difficilement accessible à certains élèves. Aucun élève n'est donc bloqué dans son activité mathématique.

Aucune rédaction particulière n'est demandée à ce stade. Les élèves n'adhéreraient pas très bien et trouveraient artificielle – à juste titre – une rédaction détaillée dans ce genre de situation simple.

Remarque : Les élèves qui ont fini plus vite peuvent être dirigés vers des problèmes qui ne seront pas proposés à tous et qui peuvent ne pas du tout mobiliser ce nouveau savoir. En fin de séquence, est institutionnalisé ce que tout élève a compris, à savoir : les croquis et les calculs.

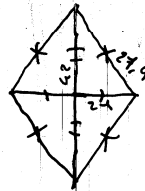
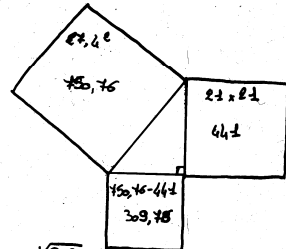
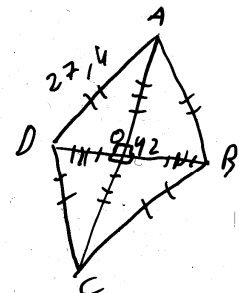
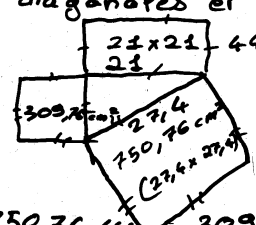
Annexe 3 : productions d'élèves en géométrie

Problème :

Le côté d'un losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales 42 cm.

Quelle est la longueur de sa seconde diagonale ?

Productions d'élèves :

- On sait que un côté du losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales mesure 42 cm - pour trouver la deuxième diagonale on fait : $42 \div 2 = 21 \text{ cm}$ conclusion : donc l'autre diagonale fait 21 cm 	Un losange est composé de 4 triangles rectangle.  Nous avons pris la moitié de la diagonale ce qui fait 17,6 pour trouver la longueur de la diagonale on multiplie par 2 : $17,6 \times 2 = 35,2$ la longueur de la diagonale est 35,2 cm.
 Dans le triangle AOD rectangle en O $AD^2 - AO^2 = DO^2$ $27,4^2 - 21^2 = 309,76$ $\sqrt{309,76} \approx 17,6$ $17,6 \times 2 = 35,2$ Donc la seconde diagonale mesure 35,2 cm	Sachant que un losange a des diagonales perpendiculaires on peut trouver le côté d'une des diagonales comme avec un triangle rectangle en prenant la longueur d'une des diagonales et un côté  $21 \times 21 = 441 \text{ cm}^2$ $21 \times 17,6 = 369,6$ $750,76 - 441 = 309,76$ $17,6 \times 17,6 = 309,76 \text{ donc le côté mesure } 17,6 \text{ cm}$

Annexe 4 : un exemple de protocole d'alternance maison-classe

Remarque préalable :

Dans ce travail, les élèves les plus fragiles rencontrent des difficultés dès le moment où ils essaient de faire la figure. Les autres font la figure, conjecturent et prouvent assez facilement que le quadrilatère est un parallélogramme. Par contre, le fait que PIQA est un rectangle échappe à beaucoup. Le démontrer présente une véritable difficulté pour tous et les débats à ce stade sont très riches.

Le protocole qui suit permet d'accompagner les élèves de façon différenciée dans leurs difficultés (même précoces) pour que tous puissent être bien concernés par le débat centré sur l'argumentation qui mène au rectangle.

Au jour 1, on donne aux élèves l'énoncé suivant :

C est un cercle de centre I.
M est un point de C.
A est le symétrique de I par rapport à M.
La médiatrice de [MI] coupe le cercle en deux points : soit P l'un d'eux.
Q est le symétrique de P par rapport à M.
Quelle est la nature du quadrilatère PIQA ?
Justifier la réponse.

Pour le jour 2, ils doivent faire la figure et, en cas de difficulté, préparer des questions précises par écrit.

Au jour 2, en plénière, des questions sont posées aux élèves qui ont réussi, par les élèves qui ont eu des difficultés. Les premières fois où ce dispositif est utilisé, les élèves posent souvent des questions trop vagues. Mais petit à petit, ils apprennent à s'en emparer et leurs questions deviennent propices à une avancée.

Le professeur engage les élèves à rappeler la définition et la propriété caractéristique de la médiatrice, par exemple.

Pour le jour 3, chacun devra avoir une figure correcte et une conjecture de la réponse.

Au jour 3, les élèves échangent leurs cahiers pour contrôler les figures et énoncent leurs conjectures. Le professeur peut animer un débat sans se positionner lui-même.

Pour le jour 4, chacun doit mettre par écrit, sur le cahier de recherche, une argumentation pour prouver sa conjecture.

Au jour 4, les élèves débattent toujours sans que le professeur se positionne. En revanche, il demande à certains de reformuler définitions et théorèmes utiles.

Pour le jour 5, chaque élève écrit son argumentation personnelle ou rédige une démonstration complète sur une copie que le professeur relèvera.

À chaque séance, dix minutes sont consacrées à ce travail. Le reste de la séance est mené de façon ordinaire sur du numérique, par exemple.

Avec un tel protocole, on observe que les phénomènes négatifs décrits plus haut sont beaucoup moins fréquents. En effet, les élèves en difficulté se sentent épaulés et retrouvent de la motivation. En outre, ils constatent que leurs efforts sont récompensés puisque leur production est en général de qualité tout à fait correcte. Les erreurs et les maladresses que le professeur y trouve sont exploitables et lors de la synthèse, ils ont encore la possibilité de progresser.

Certains élèves sont en trop grande difficulté pour affronter seuls certains travaux à la maison : c'est une des raisons principales qui les poussent à les désinvestir. Dans ce

dispositif, ils savent que, même s'ils sont bloqués à certains moments devant la tâche, ils vont quand même produire quelque chose d'utile, une question pour le lendemain, par exemple : ils ne seront pas des élèves en échec, mais des élèves qui cherchent.

Annexe 5 : exemple de questions « défi »

On donne un exemple de questions « défi » posées à certains qui peut être l'occasion d'une mise en commun collective (ce qui atténue beaucoup l'impression de clivage dans la classe).

Exercice donné à tous :

Tu travailles dans une usine qui fabrique des bonbons.
Ces bonbons ont la forme de petits triangles rectangles de 5 mm d'épaisseur et dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm.
Tu dois concevoir des boîtes en carton qui permettent de ranger une pile de 10 bonbons.
Dessine, à main levée, une représentation en perspective cavalière d'une de ces boîtes et prépare un patron qui permette de la fabriquer.

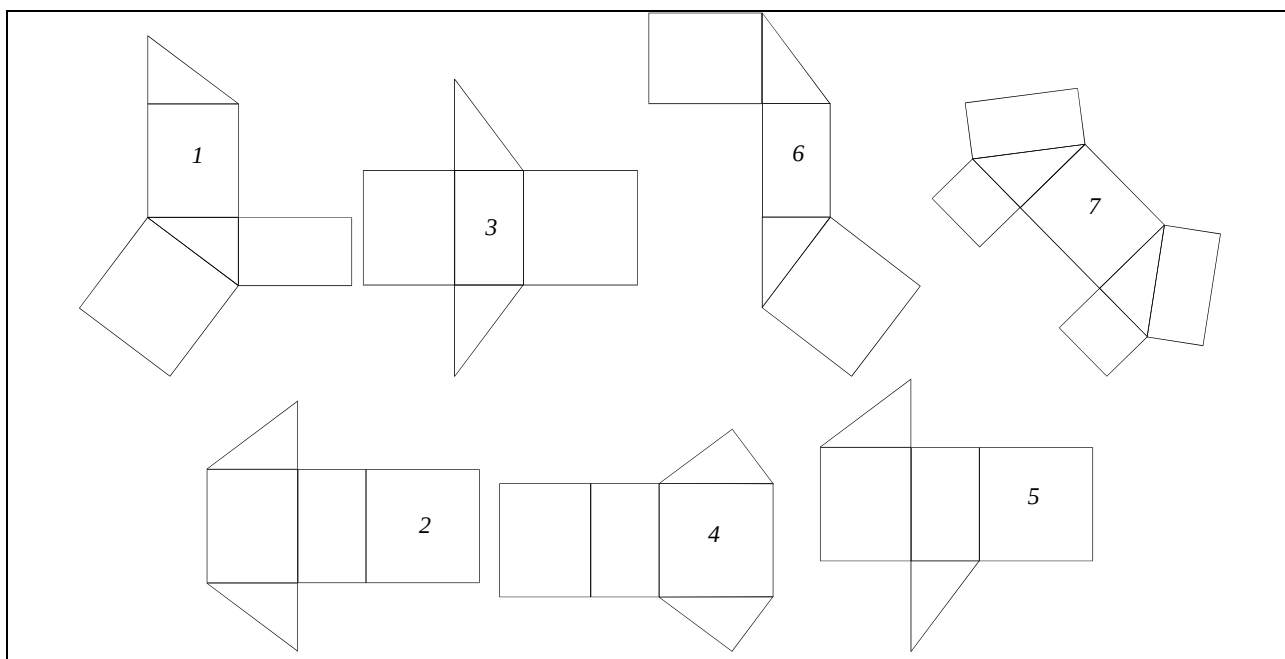
Très vite, on voit les écarts se creuser entre les élèves. On peut alors différencier le travail pour éviter que le groupe ne devienne ingérable et permettre à chacun de travailler à son niveau.

Par exemple, définir trois types de contrat :

1. Les élèves en difficulté ne feront que l'exercice. Certains vont bénéficier d'une aide importante : on peut leur montrer les boîtes construites, les leur laisser en manipulation éventuellement. Ils pourront prendre le temps de travailler sur les constructions élémentaires de géométrie plane.
2. Les élèves un peu plus à l'aise feront deux ou trois patrons non superposables. Cette seconde consigne peut leur être donnée à la fin du premier travail.
3. Les plus rapides essaieront de construire le patron le plus original : ce sera leur défi.

Au fil du travail, il est possible de glaner un nombre important de patrons non superposables, justes ou faux, des plus classiques aux plus originaux.

Voici les productions d'une classe :



À la fin de ce travail, on peut retrouver la classe unie sur une même activité : les patrons collectés et représentés sur transparents par le professeur sont-ils satisfaisants ? A quoi le voit-on ?

Les élèves en difficulté pourront manipuler les patrons sur papier pour conforter la classe dans la réponse proposée.

Dans cet exemple, les élèves en difficulté ont un véritable temps pour travailler des aptitudes du socle, même dans un apprentissage « hors socle » que constitue le travail sur les prismes.

Annexe 6 : Exemple de protocole d'enseignement pour l'addition des relatifs

Séance 1

Le professeur : « Il y a quelques temps, nous avons découvert de nouveaux nombres : les nombres décimaux relatifs. On voudrait pouvoir les additionner en gardant toutes les règles de calcul qu'on utilise déjà avec les nombres positifs.

Comment faire ? »

$$(-2) + 5 = ?$$

Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.

Plénière : échange + débat.

Sur les cahiers : $(-2) + 2 = 0$ (la somme de 2 nombres opposés est nulle).

$$\text{Donc } \boxed{(-2)+5 = (-2)+2+3 = 3}.$$

En travail individuel : $7 + (-3) =$; $(-3,2) + 6 =$.

Fin de séance : autre chose.

Séance 2

$$(-5) + 8,7 =$$
 ; $(-3) + (-4) =$.

Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.

Plénière : échange + débat.

Sur les cahiers : $(-3)+(-4)+7 = (-3)+(-4)+3+4 = (-3)+3+(-4)+4 = 0$ donc $\boxed{(-3)+(-4) = -7}$.

En travail individuel : $(-2,5)+(-3) =$; $8,4+(-6) =$; $(-3,2)+(-1,2) =$.

Fin de séance : autre chose.

Séance 3

$$(-5)+(-6) =$$
 ; $9+(-3) =$; $(-9)+2 =$

Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.

Plénière : échange + débat.

Sur les cahiers : $(-9)+2 = (-7)+(-2)+2 = -7$ donc $\boxed{(-9)+2 = -7}$.

Calcul mental en travail individuel

$$(-3)+2 =$$
 ; $(-2)+(-1) =$; $5+(-4) =$.

Séance 4

Les élèves s'entraînent en autonomie par deux ou en petits groupes pour préparer une évaluation formative.

Pendant cet entraînement, ils ont consigne de s'entraider à progresser. Ils s'expliquent donc les uns aux autres. Certains commencent à recourir à des explications qui s'appuient bien sur le caractère générique des exemples étudiés. Progressivement, les élèves reviennent moins aux justifications initiales : des règles "élèves" émergent ici et là, sans être imposées à tous.

Par la suite, en plénière, les erreurs seront travaillées par recours aux justifications initiales.

Cependant, des élèves diront qu'ils ont remarqué que la somme de deux nombres relatifs négatifs est négative et que dans ce cas, ils ajoutent les distances à 0. Ces remarques seront valorisées sans être imposées à tous.

Ainsi, les uns peuvent avancer sans être retardés tandis que d'autres peuvent disposer d'un peu plus de temps pour expérimenter.

Un peu chaque jour : un ou deux calculs.

III. Contribution à l'évaluation de la compétence 3 du socle

Mettre en œuvre le socle commun implique de faire vivre concrètement en classe deux objectifs de formation : le souhaitable pour tous (le programme), le nécessaire à tous (le socle commun). De façon analogue, l'évaluation revêt donc un double enjeu : mesurer la maîtrise du programme et mesurer celle des exigibles du socle commun.

1. Un attendu demeure : évaluer la maîtrise du programme

L'évaluation de la maîtrise du programme, qui fait partie des pratiques professionnelles installées, reste bien un attendu au collège.

Dans le cadre de cette évaluation il est important de poursuivre des évolutions d'ores et déjà engagées.

L'introduction du programme de mathématiques précise en effet que :

« L'évaluation de la maîtrise d'une capacité par les élèves ne peut pas se limiter à la seule vérification de son fonctionnement dans des exercices techniques. Il faut aussi s'assurer que les élèves sont capables de la mobiliser d'eux-mêmes, en même temps que d'autres capacités, dans des situations où leur usage n'est pas explicitement sollicité dans la question posée. »

Quand on cherche à mesurer la maîtrise d'une capacité du programme, il est donc nécessaire d'envisager sa mobilisation à plusieurs reprises et dans des situations variées, en tenant compte de différents niveaux de maîtrise.

Premier niveau de maîtrise :

La simple restitution de savoir dans des exercices d'application à l'identique. Par exemple être capable, dans une situation simple dans laquelle le contexte d'utilisation d'un théorème est explicite, d'utiliser ce théorème.

Second niveau de maîtrise :

Réinvestissement de la ressource dans une situation simple mais inédite.

Troisième niveau de maîtrise :

Savoir choisir et combiner plusieurs ressources autrement dit être capable d'identifier des contextes pertinents d'utilisation de cette ressource (l'utiliser correctement et quand il le faut, ne pas l'utiliser quand il ne le faut pas) y compris dans des situations inédites, voire de tâches complexes.

Pour savoir si un élève maîtrise un savoir ou un savoir-faire du programme, il est essentiel d'évaluer cette maîtrise à plusieurs reprises tout en veillant à proposer des situations d'évaluation permettant de varier le niveau de maîtrise attendu.

Mettre cela concrètement en œuvre a des incidences sur la conception des supports d'évaluation et notamment des textes de devoirs.

2. Donner place aux compétences⁴ dans l'évaluation

Trop d'élèves de collège se révèlent incapables de réussir les devoirs de contrôle destinés à mesurer la maîtrise du programme. Le socle commun ayant vocation à permettre à tout élève de tirer profit de l'enseignement reçu, on doit donc, pour les élèves en difficultés sur les acquisitions prévues par le programme, pouvoir évaluer les capacités qu'ils ont construites. Or pour ces élèves là, le plus important (on l'a vu dans la partie formation) est qu'ils acquièrent la démarche de résolution de problème. Il est donc essentiel de mettre en place des évaluations qui soient pour eux une occasion de montrer positivement ces acquis essentiels. Pour cela il est nécessaire que ces élèves soient évalués sur la réalisation d'une tâche complexe, exercice ou problème qui, posé sous une forme ouverte et mettant en œuvre une combinaison de plusieurs procédures et mobilisant plusieurs ressources, rend possible la mise en œuvre de stratégies personnelles diverses et donc pas exclusivement la stratégie experte.

La première évolution de l'évaluation induite par la mise en œuvre du socle commun consiste à permettre à tout élève de manifester une maîtrise de la démarche de résolution de problème et donc d'être régulièrement évalué dans le cadre d'une tâche complexe qui lui soit accessible.

Par ailleurs, l'évaluation de compétences est par nature positive : elle consiste à attester, au fur et à mesure de leur construction par un élève, la maîtrise de diverses compétences. Il s'agit donc de pointer des réussites progressives et non des manques. De plus, dans le cadre de la réalisation d'une tâche complexe, une compétence est montrée ou ne l'est pas. Il s'agit là d'une information binaire qui n'a rien à voir avec l'attribution d'une note.

Evaluer des compétences se distingue des évaluations traditionnelles par l'absence de note.

Pour autant, évaluer les compétences du socle commun n'impose pas *a priori* de rejeter un système de notation qui reste encore aujourd'hui une attente sociale, voire institutionnelle⁵.

La mise en œuvre du socle commun n'impose pas nécessairement de supprimer les notes mais de les compléter par une évaluation des compétences.

Mais alors faut-il mettre en place deux types d'évaluation : une évaluation du programme et une évaluation de compétences ? Et si oui, comment peut-on concrètement, et de façon pragmatique, gérer cette double évaluation ?

Les pratiques habituelles d'évaluation accordent une place conséquente aux « devoirs de contrôle » parce qu'ils sont un moyen efficace d'évaluer un grand nombre d'élèves simultanément. Il est donc légitime de commencer par chercher à utiliser une stratégie analogue pour l'évaluation des compétences du socle commun. Mais au lieu de chercher à mettre en place, à des moments différents, deux évaluations de natures distinctes, faire

⁴ Le socle commun est constitué de sept compétences qui se déclinent en domaines, chaque domaine étant décliné en items. « Pratiquer une démarche scientifique et technologique, résoudre des problèmes », est un « domaine ». « Rechercher, extraire, organiser l'information utile » est un item de ce domaine.

⁵ Les notes de contrôles continus sont prises en compte pour l'obtention du DNB

preuve de pragmatisme et adopter des modalités d'évaluation tenables dans la durée, encourage plutôt à partir de l'existant, quitte à le faire évoluer.

Les devoirs de contrôle habituels peuvent être utilisés et même, si l'on veut faire preuve d'un pragmatisme de bon aloi, doivent être utilisés pour évaluer des attendus du socle commun.

Une première question devient donc : comment faire évoluer les devoirs de contrôle pour qu'ils permettent aussi l'évaluation de compétences ?

- Tout élève, y compris celui qui rencontre des difficultés dans l'acquisition du programme, doit pouvoir être évalué régulièrement dans le cadre d'une tâche complexe qui lui soit accessible. En conséquence, si l'on souhaite que les contrôles puissent permettre l'évaluation de compétences, leur contenu doit en tenir compte.

Première évolution :

Pour qu'un devoir de contrôle permette l'évaluation de compétences, son sujet doit contenir des exercices, des questions ou problèmes qui, posés sous une forme adaptée, permettent de montrer tout ou partie des capacités telles que prendre des initiatives, élaborer une stratégie, réaliser un geste technique, expliquer ou rectifier une erreur.

- Bien sûr, certains élèves, surtout les plus fragiles, ne mèneront sans doute pas à bien, en complète autonomie, ce qui est *a priori*⁶ le cas dans un devoir de contrôle, ce type de tâches. Pour autant, ils peuvent tout de même montrer dans ce cadre des compétences attendues du socle commun, et cela d'autant plus facilement qu'ils ont pris l'habitude de s'investir dans une recherche et de laisser trace de leurs essais sur leur copie.
Par exemple, un élève peut être capable de conduire un bon raisonnement mais rencontrer une difficulté au niveau de la réalisation technique ou au niveau de la mise en forme écrite de son raisonnement.

Adopter des stratégies d'évaluation favorables à la prise en compte des capacités attendues du socle commun passe aussi par le fait de porter un regard particulier sur les productions écrites des élèves.

Seconde évolution :

Rechercher les aptitudes que les élèves montrent dans les travaux qu'ils rendent, même au sein d'une production imparfaite ou inaboutie voire globalement fautive, et les valoriser est une autre évolution de l'évaluation induite par la mise en œuvre du socle commun.

- Les élèves, qui ne réussissent pas les évaluations destinées à mesurer la maîtrise du programme, obtiennent très souvent des notes basses qui peuvent finir par les décourager et même déconstruire leur implication dans leur travail. Elaborer des barèmes qui valorisent les réussites et identifient les compétences montrées tout au long du devoir peut limiter cet effet désastreux.

Par exemple, dans le cadre de la résolution d'un problème non guidé, on peut sans crainte s'autoriser à accorder une partie des points à tout élève ayant amorcé un

⁶ Nous verrons comment il est possible de faire autrement.

raisonnement correct : il montre en effet qu'il a compris les informations données dans l'énoncé et qu'il a su engager une démarche personnelle...

Troisième évolution

Les modalités d'attribution d'une note doivent être construites de manière à valoriser les compétences que les élèves montrent, même au sein d'une production imparfaite, inaboutie, voire globalement fausse.

- Cependant, même si dans les stratégies de correction adoptées on veille bien à valoriser les réussites et les compétences montrées par les élèves, la note finale, du fait même de sa nature globalisante, ne rend pas compte à l'élève de ce qu'il sait faire. De fait, elle n'apporte une information vraiment précise qu'à ceux qui ont « une très bonne note »...

Quatrième évolution :

Évaluer ne peut plus se résumer à noter

Nous aborderons très précisément ces quatre évolutions essentielles dans le paragraphe 4. Toutefois l'expérience prouve qu'actuellement, sur le terrain, certains obstacles persistent, tout particulièrement au niveau des représentations de l'attendu de l'évaluation. Avant d'aller plus loin il est donc important de clarifier cet attendu.

3. Comment faciliter une contribution des mathématiques à l'évaluation de la compétence 3 du socle commun ?

Rappelons pour commencer que le professeur de mathématique a, comme tous ses collègues, toute légitimité pour participer à l'évaluation de plusieurs des sept compétences du socle commun. Son expertise est du reste nécessaire pour garantir la vision globale de l'élève qui est attendue.

Mais dans le cadre de sa participation à l'évaluation de la compétence 3, **son attention peut se concentrer sur huit items. items répartis dans deux des domaines figurant dans la grille de référence relative à la compétence 3.**

À l'intérieur du domaine « Pratiquer une démarche scientifique et technologique, résoudre des problèmes » :

- o C1 : Rechercher, extraire et organiser l'information utile
- o C2 : Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer une consigne
- o C3 : Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, démontrer
- o C4 : Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté

Ces quatre premiers items sont essentiels car résoudre un problème nécessite tout ou partie des capacités qu'ils explicitent.

À l'intérieur du domaine « savoir utiliser des connaissances et des compétences mathématiques »

- o D1 : Organisation et gestion de données
- o D2 : Nombres et calculs
- o D3 : Géométrie
- o D4 : Grandeurs et mesures

Ces quatre items précisent les champs de connaissances que les élèves doivent construire.

Pour évaluer de façon fiable chacun des quatre items D1, D2, D3 et D4, on pourrait croire nécessaire de constituer des grilles très précises reprenant par exemple les capacités exigibles telles qu'elles sont rédigées dans les programmes, capacités que l'on renseignerait à chaque devoir.

Par exemple, rien que pour l'item D2, on pourrait avoir :

		Devoir 1	Devoir 2	etc
Nombres et calculs	Calculer avec des entiers (tables de multiplication, calculs de base, divisibilité, ...)			
	Calculer avec des décimaux (opérations posées, règles des signes, ...)			
	Calculer avec des fractions			
	Conduire un calcul littéral simple : substituer, transformer une expression du premier degré			
	Savoir quand et comment utiliser les quatre opérations			
	Mener à bien un calcul, mentalement, à la main, à la calculatrice, avec l'ordinateur			

On pourrait même, très consciencieusement, imaginer des grilles d'un niveau de précision encore plus grand.

Par exemple, pour le calcul avec des fractions :

Calcul avec des fractions	Fractions avec le même dénominateur
	Fractions avec des dénominateurs multiple l'un de l'autre
	etc

Sans doute de telles grilles permettraient-elles d'obtenir des informations précieuses sur les acquis de chaque élève. Cependant il ne semble pas tenable dans la durée de remplir de telles grilles pour chaque devoir et pour chaque élève et cela dans quatre ou cinq classes. En outre, en procédant de cette manière, se poserait *in fine* le problème de la synthèse d'une information aussi précise et autant détaillée.

L'évaluation des compétences du socle commun, en vue d'éclairer une prise de décision collective de validation, n'impose pas d'observer de façon fine les traces de la mise en œuvre par un élève d'un nombre important de savoirs ou de savoir-faire distincts. Il est raisonnable de se limiter à repérer les réussites de chaque élève sur les huit items précédemment cités.

4. Comment faire évoluer les devoirs de contrôle habituels et les modalités d'évaluation pour que ces travaux contribuent à la double évaluation attendue ?

Temps n°1 : La fabrication du texte d'un devoir

Pour concevoir le texte d'un devoir permettant d'atteindre ce double objectif, il est important de garder présent à l'esprit plusieurs points déjà évoqués :

- **le devoir donne place à des exercices simples qui font appel à des connaissances mathématiques du socle qui relèvent des quatre champs D1, D2, D3 et D4** (y compris des exigibles du socle des années antérieures). La grille de référence du palier 3 et le document d'aide au suivi de l'acquisition des connaissances et des capacités publiés sur Eduscol sont un outil précieux pour le choix de ces exercices.
- **le devoir donne place à des problèmes, des tâches dont la complexité est suffisante** pour que tout élève puisse montrer C1, C2, C3 et C4. Outre le document présent, la banque de situations d'apprentissage et d'évaluation fournit des pistes de travail.
- le devoir couvre **plusieurs champs du programme** ;
- le devoir permet d'évaluer **le socle mais aussi le programme**.

Par ailleurs l'évaluation des réussites au travers de solutions incomplètes ou partiellement erronées ne sera possible que si l'élève a osé garder trace de ses essais, de ses idées, de sa recherche. Or trop d'élèves préfèrent ne rien écrire plutôt que d'écrire des choses fausses. Mais si un élève n'écrit rien ou s'il ne note que son résultat et que ce dernier est faux, on ne peut pas savoir ce qui, dans son raisonnement, peut avoir été correct. D'où la nécessité en formation de libérer leur inventivité et de valoriser leurs écrits intermédiaires (voir la partie « Formation » de ce document).

Les énoncés des contrôles peuvent aussi encourager un élève à garder trace de ses essais. Pour cela il est possible de renforcer des précisions données à l'oral par des indications portées explicitement sur le texte du contrôle. **Par exemple :**

« Si la recherche n'est pas terminée, laisser tout de même trace des essais faits pour trouver. Ils pourront être pris en compte dans l'évaluation. »

Temps n°2 : L'ensemble des devoirs

Si l'on veut être en fin d'année en mesure de dire, pour chaque élève, et en ayant la possibilité d'argumenter ses affirmations, s'il a ou non montré positivement, à plusieurs reprises et dans des contextes différents, chacun des huit items du socle, il est nécessaire de donner de la cohérence à l'ensemble des devoirs proposés durant l'année.

Deux conditions pour cela :

1. Le contenu de chacun des items D1, D2, D3 et D4 doit être testé tout au long de l'année et dans des contextes variés.

On retrouve à nouveau la nécessité déjà pointée dans le cadre de l'évaluation de la maîtrise du programme, à savoir évaluer une maîtrise à plusieurs reprises, tout en veillant à proposer des situations permettant de varier les points de vue et le niveau de maîtrise attendu. Cela nécessite de veiller à entretenir les savoirs et savoir-faire travaillés dans le quotidien de la classe. En effet si les élèves ont travaillé exclusivement pendant les semaines précédant un contrôle sur le théorème de Thalès, il sera difficile de faire porter le devoir sur des notions autres et dont l'apprentissage n'aurait pas été entretenu.

En outre, un problème qui porterait sur le théorème de Thalès, dans une période où c'est l'unique outil sollicité, ne permet d'évaluer qu'un premier niveau de maîtrise (à savoir une simple restitution de savoir dans des exercices d'application à l'identique) sans permettre d'évaluer de façon fiable l'item C3.

Enfin si les compétences ne sont pas entretenues, elles s'affaiblissent avec le temps. Il n'est pas extraordinaire qu'un élève ne sache plus immédiatement calculer un pourcentage en 4e, s'il n'en a pas eu régulièrement l'occasion.

2. L'ensemble des devoirs doit couvrir l'ensemble des contenus exigibles du socle commun ainsi que ceux du programme.

Ces conditions ne doivent pas être considérées comme des contraintes puisqu'elles favorisent les apprentissages de façon générale et l'acquisition des compétences du socle, plus particulièrement.

Exemple : Extrait du 5^e devoir d'une classe de 4^e. ⁷

a. Des exercices simples qui font appel aux connaissances du socle :

Exercice 2 (sur une feuille à part, sans calculatrice) Calculer en détaillant les étapes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible. $\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \times 5 =$	Remarques Les élèves doivent être régulièrement confrontés à ce type d'exercices, en particulier lors des activités rapides de début de séance, afin que ces savoirs soient ancrés dans la durée en étant réactivés régulièrement.
---	--

⁷ Le texte complet de ce devoir est en annexe 1

Exercice 3

Pendant les soldes, un magasin accorde une remise de 15 % sur tous les articles. Calculer le nouveau prix d'un article qui coûte initialement 90 €.

Exercice 4

Sur les 420 élèves d'un collège, 273 sont demi-pensionnaires.

Calculer le pourcentage de demi-pensionnaires dans ce collège ?

L'exercice 2 offre un observable de l'item D2 « nombres et calculs »

Les exercices 3 et 4 offrent un observable de l'item D1 « gestion des données »

b. Des problèmes qui permettent à l'élève de montrer C1⁸, C2, C3 et C4.

Exercice 5

	Devoir 1	Devoir 2	Devoir 3	Devoir 4
Note de Fatima	12	15,5	13	
Note de Rémi	10,5	12	6	

La moyenne trimestrielle de Rémi et Fatima est calculée en faisant la moyenne des quatre devoirs.

1. Quelle sera la moyenne de Fatima si elle a 14 au quatrième devoir ?

2. « En tâtonnant », c'est-à-dire en faisant beaucoup d'essais, Rémi calcule la note qu'(elle) il doit obtenir au quatrième devoir pour que sa moyenne trimestrielle soit 10.

Combien doit-il trouver ? (sans justification) Comment aurait-il pu trouver cette note sans tâtonner ?

Remarque

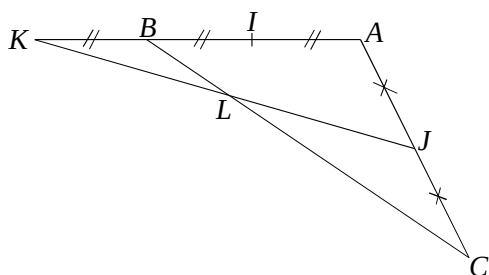
La question 2 est une tâche dont la complexité peut être considérée comme suffisante dans la mesure où

- la stratégie de résolution n'est pas induite et reste bien à la charge de l'élève
- il y a diversité des stratégies de résolution :
 - démarches par tâtonnements
 - raisonnements arithmétiques
 - algébrisation

Exercice 7

Sur la figure ci-dessous :

- ABC est un triangle.
 - I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
 - K est le symétrique de I par rapport à B.
 - La droite (JK) coupe [BC] au point L.



1. Pour prouver que (IJ) est parallèle à (BL), Claire a écrit la démonstration suivante

Dans le triangle ABC :

I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC]

Un théorème permet d'affirmer que : (IJ) // (BC)

Or L est sur (BC) donc : (IJ) // (BL).

Enoncer le théorème utilisé par Claire

2. Prouver que L est le milieu de [KJ] en écrivant un pas de démonstration.

La question 1 peut permettre à un élève de montrer la maîtrise de C1 et de C2.

La question 2 est une tâche dont la complexité est grande.

- La figure est complexe,
- l'élève doit extraire de cette figure un triangle (le triangle KIJ) dans lequel il doit mobiliser un théorème dit « de la droite des milieux ».

Cette question teste le troisième niveau de maîtrise d'une ressource explicité page 1 :

« identification du contexte pertinent d'utilisation d'une ressource dans une situation complexe. »

⁸ Voir en annexe 4 quelques éléments de réflexion autour de C1.

Exercice 8

A. Voici un programme de calcul :

- Ajouter 1
- Quadrupler
- Retirer le double du nombre de départ
- Retirer 2

1. Loïc applique le programme au nombre 4. Prouver qu'il trouve 10.
2. Quel nombre trouve-t-il quand il applique le programme au nombre (-3) ?

B. Luc entre un nombre dans sa calculatrice puis utilise les touches suivantes :

$\times$	2	+	3	EXE	-	1	EXE
----------	---	---	---	-----	---	---	-----

Luc et Loïc s'aperçoivent qu'il se passe quelque chose de particulier quand ils choisissent tous les deux le même nombre de départ.

1. Conjecturer ce qui se passe en expliquant comment cette conjecture est obtenue.
2. Prouver que la conjecture faite est juste.

La question B est une tâche qui peut permettre à tout élève y compris le plus fragile de montrer

- C1 en ayant donné sens aux deux programmes de calcul
- C2 en ayant réalisé des calculs nécessaires pour le travail de conjecture
- C3 en ayant élaboré une stratégie de preuve ou en ayant conclu avec prudence : « il me semble que ... mais mes essais ne sont pas une preuve. »
- C4 en rendant compte de sa démarche

Le fait que l'algébrisation, nécessaire pour apporter une preuve, ne soit pas induite offre par ailleurs une bonne occasion de tester un bon niveau de maîtrise.

Autre exemple

Toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

"A nous trois, nous sommes centenaires !" dit Simon à son fils et à son père. En effet, si Simon a 28 ans de plus que son fils Alexis et 35 ans de moins que son père Jean, la somme de leurs âges est égale à 100.

Quel âge ont Alexis, Simon et Jean ?

Exercice qui peut permettre à tout élève y compris le plus fragile de montrer

- C1 en manifestant sa compréhension de « la somme des âges est égale à 100 » et des différences d'âges
- C2 en réalisant des calculs justes sans calculatrice
- C3 en s'engageant dans une démarche (essais, raisonnements arithmétiques, passage à l'algèbre)
- C4 en présentant avec soin les calculs faits pour chercher.

Temps n°3 : Les élèves composent

Dans les pratiques habituelles, les élèves composent silencieusement sous surveillance, en totale autonomie.

Il arrive alors fréquemment que les élèves les plus fragiles laissent de côté de grands pans du devoir.

Quand un de ces élèves ne fait pas un exercice d'évaluation, il ne montre aucune des compétences requises pour cet exercice. On ne peut pourtant pas affirmer, pour autant, qu'il ne possède aucune de ces compétences. On peut seulement dire que l'on n'a pas été en mesure de les constater positivement.

D'où l'idée d'accompagner les élèves les plus fragiles pendant qu'ils composent.

Narration d'une pratique conduite dans deux classes de 5^e dans chacune desquelles 6 élèves sont en très grande difficulté.

Ces 6 élèves ont été regroupés géographiquement en classe le temps du contrôle. Dans chacune des classes, le professeur est intervenu auprès d'eux. Les autres ont travaillé de façon autonome. Le récit porte donc sur 12 élèves au total, 6 par classe.

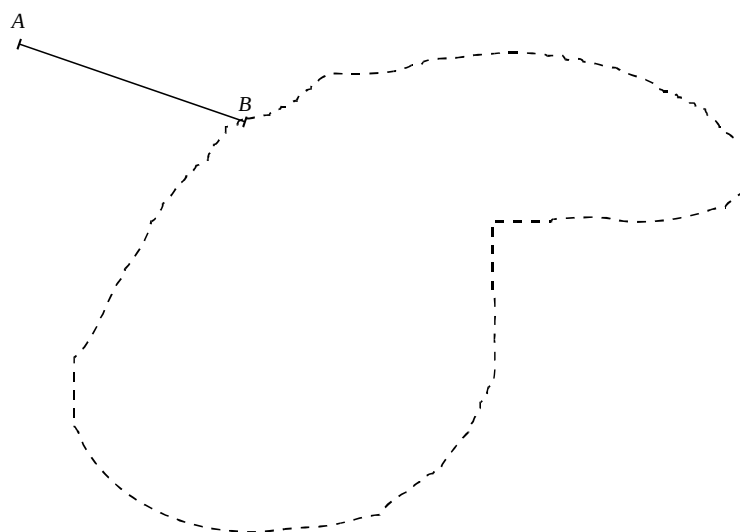
Tout au long du contrôle, le professeur les a rassurés, les a aidés à dépasser certains obstacles (lecture de consignes, choix des exercices sur lesquels porter les efforts, mauvaise utilisation du rapporteur, mauvaise organisation...) afin que les « petites choses » que ces élèves savent faire puissent être évaluées positivement. Ces acquis ne résistent pas d'habitude face aux obstacles auxquels ces élèves se heurtent classiquement quand ils sont en autonomie.

Exercice

Construire les points C, D, E, F et G sachant que :

- La figure est dans la zone en pointillés ;
- Le point C est le symétrique du point A par rapport au point B ;
- BCDE est un rectangle
- $CD = 5\text{ cm}$;
- $\angle CBF = 30^\circ$;
- BCGF est un losange.

La construction sera codée.



Ces 12 élèves ont lu et commencé le travail seuls.

Le professeur s'est assuré que tous plaçaient C. Cinq élèves ont hésité au départ : le professeur, pour les rassurer, leur a demandé si cet exercice leur rappelait des situations travaillées en classe. Tous ont su citer un exercice bien maîtrisé : une « ribambelle » de quadrilatères qui était à construire à la maison... Ca a suffi pour qu'ils démarrent.

Tous ont réussi à construire un rectangle avec l'équerre mais 4 sur les 12 n'avaient pas vu le $CD = 5$. Avec une question du genre : « comment as-tu trouvé la longueur de CD ? », ils ont su rectifier et continuer.

Certains ensuite étaient coincés pour construire F : de quel côté ?... et avaient des difficultés à anticiper le losange final. Certains le pensaient en « chevauchement du rectangle » ; parmi ceux-là, quelques-uns avaient essayé mais la figure sortait de la zone autorisée. Ils ne pouvaient pas

l'imaginer « de l'autre côté », ils pensaient avoir un mauvais losange. D'autres étaient complètement arrêtés par l'idée même du chevauchement sans trouver de solution. Il a suffi au professeur de montrer à ces élèves la zone dans laquelle se trouvait le losange, de leur demander de l'imaginer et de passer le doigt sur ce losange « imaginé », pour que plusieurs d'entre eux construisent le losange correctement.

Deux n'arrivaient pas à utiliser correctement le rapporteur : le professeur les a aidés. Ensuite l'un a pu terminer. L'autre a tâtonné pour construire G à la règle sans compas mais quand le professeur lui a demandé ce qu'il savait des losanges, il a su dire que les quatre côtés sont de même longueur.

Deux autres avaient bien utilisé le rapporteur mais placé F « au bord » du rapporteur tout en sachant que le losange a quatre côtés de même longueur (ce dont le professeur s'est assuré). F placé, G n'a pas posé de problème.

Les deux derniers étaient dans l'approximation partout : le professeur leur a demandé de critiquer leur travail pour l'améliorer. Ils y sont très bien parvenus.

Ainsi accompagnés, ces 12 élèves ont montré des compétences du socle dont ils n'auraient pas pu faire preuve s'ils avaient dû réaliser, en totale autonomie, cet exercice ou même des constructions plus élémentaires.

Au cours de tels accompagnements, les aides consistent :

- à lever certains obstacles dont l'évaluation est différée parce que les élèves ne sont pas encore prêts ;
- à intervenir de façon suffisamment ouverte pour amener l'élève à poursuivre son raisonnement sur de véritables questions où il pourra montrer des aptitudes à l'oral comme à l'écrit ;
- à mener de petites interviews pour mieux analyser les erreurs commises et la nature des blocages.

Le plus souvent, en levant quelques difficultés liées à la lecture et à la prise d'informations (autrement dit à tout ce qui relève de C1), on peut permettre aux élèves les plus fragiles de se confronter eux aussi à des situations complexes et de montrer qu'ils peuvent faire des mathématiques, c'est à dire développer C2, C3 et même C4 au point de devenir capables de le montrer positivement.

Un tel accompagnement ne nécessite pas une très grande organisation du groupe classe puisque tous les élèves qui ne sont pas accompagnés observent les règles habituelles d'un devoir et travaillent donc seuls. Il faut tout de même s'entraîner un peu pour que, par exemple, les questions posées pour accompagner restent bien ouvertes et n'induisent pas de méthodes particulières.

En outre, il est nécessaire d'explicitier ce qui se passe lors de cet accompagnement, qui rompt avec les habitudes, auprès de tous les élèves et de leurs parents.

Voir, en annexe 2, un exemple d'information donné aux parents sur les copies de devoir surveillé

Si établir un échange verbal avec quelques élèves au cours d'un devoir de contrôle peut contraindre à mettre provisoirement de côté l'évaluation de certaines compétences (très souvent C1), en revanche cela peut permettre à ces élèves de montrer d'autres compétences dont ils n'auraient pas pu faire preuve en complète autonomie.

Temps n°4 : L'étude des copies

Les copies que les élèves rendent sur un tel devoir, sont à étudier de manière à permettre, à la fois :

- de produire une note qui participera à la note trimestrielle attendue sur les bulletins scolaires ;
- de thésauriser les réussites montrées sur les items C1, C2... en vue d'éclairer une future prise de décision collective de validation.

Il s'agit donc de tirer profit de la correction des copies pour conduire cette double évaluation et cela, le plus simplement possible, autrement dit sans pour autant faire une double lecture de chaque copie.

Pour tous ceux qui sont en quête d'une stratégie concrète permettant de conduire cette double évaluation tout en thésaurisant les réussites montrées sur les huit items, voir un exemple en annexe 3.

Quelle que soit la stratégie adoptée trois réflexions incontournables s'imposent, au niveau

1. des modalités de correction ;
2. des critères permettant de dire que l'un ou l'autre des items C1, C2, C3, C4, D1, D2, D3 et D4 a été montré positivement ;
3. de la particularité du regard à porter sur la production de certains élèves.

Point n°1 : les modalités de correction.

Les deux systèmes d'évaluation, celui destiné à mettre une note trimestrielle et celui qui permet de thésauriser les réussites sur quelques items du socle commun, ne sont en fait pas totalement disjoints.

Plus les modalités de correction adoptées valoriseront les compétences montrées, au lieu de se focaliser sur les manques, plus les deux systèmes d'évaluation convergeront.

Exemples :

Premier exemple : question sur 2 points

2 est-il solution de l'équation $2a^2 - 3a - 5 = 1$?

Barème « classique » - Calcul correct de $2 \times 2^2 - 3 \times 2 - 5$: 1 pt - Conclusion : 1 pt	Barème « influencé » par l'évaluation des compétences La compétence évaluée est le test et non pas la maîtrise du calcul. On ne pénalise pas les maladresses de rédaction quand le calcul est présent et la conclusion explicite. Si l'attendu explicité ci-dessus n'est pas là, valoriser par - 0,5 pt le fait d'avoir correctement posé le calcul à faire (C1 montrée) - 0,5 pt le fait d'avoir réalisé un calcul correct (C2 montrée) - 1 pt le fait d'avoir répondu en cohérence avec les résultats précédents obtenus (C3 montrée)
--	---

Second exemple : Exercice sur 5 points

A. Voici un programme de calcul :

- Ajouter 1
- Quadrupler
- Retirer le double du nombre de départ
- Retirer 2

1. Loïc applique le programme au nombre 4. Prouver qu'il trouve 10.
2. Quel nombre trouve-t-il quand il applique le programme au nombre (-3) ?

B. Luc entre un nombre dans sa calculatrice puis utilise les touches suivantes :

×	2	+	3	EXE	−	1	EXE
---	---	---	---	-----	---	---	-----

Luc et Loïc s'aperçoivent qu'il se passe quelque chose de particulier quand ils choisissent tous les deux le même nombre de départ.

1. Conjecturer ce qui se passe en expliquant comment cette conjecture est obtenue.
2. Prouver que la conjecture faite est juste.

Barème « classique »	Barème « influencé » par l'évaluation des compétences
A1. : 0,5 point (Calcul considéré comme simple, donc rapporte peu de points) A. 2. : 1 point (Calcul considéré comme plus compliqué, donc rapporte plus de points) B. 1. : 0,5 point B. 2. : 3 points (Considérée comme le « véritable travail ». C'est donc la question qui rapporte beaucoup de points) ▪ 1 pt : Traduction du premier programme de calcul : $4(x + 1) - 2x - 2$ ▪ 1 pt : Traduction du second : $(2x + 3) - 1$ ▪ 1 pt : Calcul algébrique permettant de conclure	A. 1. et A. 2. : 2 points Si les deux calculs ne sont pas corrects, valoriser par ▪ 1 point la compréhension de la situation montrée par l'un des deux calculs, même avec une erreur (C1 montrée) ▪ 0,5 point le premier calcul mené correctement (C2 montrée) ▪ 1 point pour le second calcul (avec 0,5 pt pour une seule erreur de signe) B. 1. : 1 point Avoir prouvé la compréhension de la situation (l'élève fait de nouveaux calculs) et formulé une conclusion cohérente avec les calculs précédents suffit. B. 2. : 2 points ▪ 0,5 à 1 point pour un début de raisonnement (reconnaissance du fait que des exemples ne suffisent pas à la preuve, essais pour atteindre la généralité (sur le programme lui-même ou avec une modélisation algébrique) ▪ 1 point pour un raisonnement abouti (même avec des imperfections de rédaction ou une petite erreur de calcul) Remarque : C4 n'est pas évaluée de façon chiffrée dans cet exercice

Point n°2 : Critères de réussites de C1, C2, C3 et C4 dans un devoir de contrôle

L'item C1 :

Toute amorce de traitement d'une question ouverte peut être une manifestation positive de C1. **Toutefois devant une question unique très ouverte, un élève fragile non**

accompagné peut ne pas être en capacité de montrer ses compétences, en particulier C1. Pour pallier cela, on peut prévoir, à l'entrée d'une question ouverte, une question simple visant à repérer, même chez les élèves fragiles, la compétence C1.

Par exemple la question A.1. de l'exercice précédent est une bonne manière de tester la compréhension de la situation

L'item C2 :

La maîtrise attendue au niveau de la compétence C2 n'exige pas de virtuosité. **En évaluation, il faut donc veiller à ce que la résolution des problèmes posés ne nécessite pas de maîtrises techniques excessives.** En effet, si le degré de technicité nécessaire à une résolution est trop élevé, on risque de ne pouvoir évaluer pour des élèves fragiles ni C2, ni C3, ni C4 au sein de cette tâche. Un calcul simple conduit correctement, une référence claire à un théorème ou une propriété du cours, une construction classique sont autant de manifestations positives de C2.

L'item C3 :

Un plan de démonstration, des idées principales, la trace des essais conduits, une construction raisonnée, une remarque justifiant l'incohérence d'un résultat obtenu ou l'inefficacité d'un outil essayé, sont autant de manifestations possibles positives de C3. **Pour être en capacité de les observer dans une copie rendue lors d'un contrôle il est essentiel de former les élèves à écrire autre chose que des solutions entièrement rédigées, écrits qui ne sont pas encore assez naturels pour les élèves.**

L'item C4

Il n'est pas indispensable qu'un élève ait réussi l'exercice et se lance dans la rédaction de sa solution pour pouvoir montrer C4. En effet, un élève peut montrer C4 en exposant une solution erronée, en laissant sur sa copie des traces d'une recherche inaboutie ; en rendant compte de sa recherche avec un schéma clair ; en rédigeant la solution à un problème résolu collectivement en classe.

Les critères de réussites des items D1,D2, D3 et D4 sont précisés par la grille de référence et le document d'aide au suivi de l'acquisition des connaissances et des capacités du socle.

Point N°3 : le regard porté sur les productions de certains élèves.

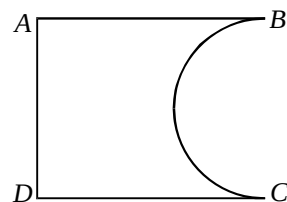
Ci dessous la production en contrôle de quelques élèves⁹

Exercice

La figure ci-contre est constituée d'un rectangle $ABCD$ percé d'un demi-disque de diamètre $[BC]$ tel que : $AB = 3$ cm et $BC = 2,4$ cm ;

Construire un agrandissement de cette figure tel que la longueur du rectangle agrandi mesure 7,2 cm.

Quelle est la valeur exacte de la largeur du rectangle agrandi ? Justifier la réponse.



⁹ Voir énoncé du devoir en annexe 1

Commentaires

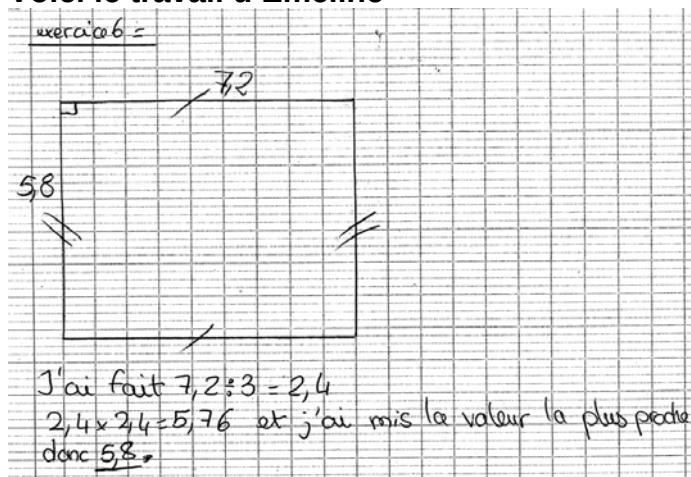
L'écrit d'Emeline montre qu'elle aussi a reconnu le contexte de la mise en œuvre d'une stratégie relevant de la proportionnalité, et qu'elle en maîtrise le traitement technique.

En revanche on ne comprend pas pourquoi elle multiplie 2,4 par 2,4. Elle ne rend pas compte clairement de sa démarche.

On peut raisonnablement considérer que Emeline a montré positivement C2, C3.

On observe aussi un critère de réussite de D1 (« Déterminer et utiliser un coefficient de proportionnalité ») et de D2 (« choisir l'opération qui convient »).

Voici le travail d'Emeline



Exercice 5

	Devoir 1	Devoir 2	Devoir 3	Devoir 4
Note de Rémi	12	15,5	13	
Note de Fatima	10,5	12	6	

La moyenne trimestrielle de Fatima et de Rémi est calculée en faisant la moyenne des quatre devoirs.

1. Quelle sera la moyenne de Rémi s'il a 14 au quatrième devoir ?
2. « En tâtonnant », c'est-à-dire en faisant beaucoup d'essais, Fatima calcule la note qu'elle doit obtenir au quatrième devoir pour que sa moyenne trimestrielle soit 10. Combien doit-elle trouver ? (sans justification) Comment aurait-elle pu trouver cette note sans tâtonner ?

Commentaires

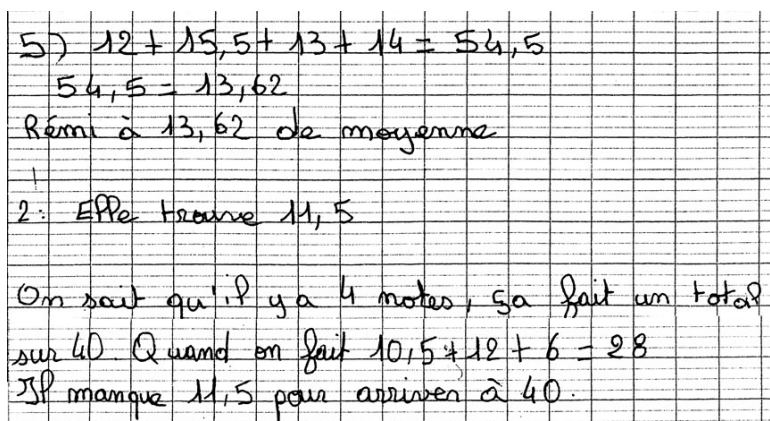
L'écrit imparfait d'Elisa montre qu'elle sait calculer une moyenne et qu'elle maîtrise le sens des opérations, même si ce qu'elle écrit n'est pas correct (mauvaise utilisation du symbole égalité, calculs notés incomplètement (28 au lieu de 28,5).

On observe aussi un critère de réussite de D1 (« calculer une moyenne ») et de D2 (« choisir l'opération qui convient »).

Elisa a su aussi élaborer une stratégie (raisonnement arithmétique) pour justifier que la note manquante est 11,5.

On peut raisonnablement considérer qu'Elisa a montré positivement C1, C2, C3.

Voici le travail d'Elisa



Un premier bilan

Un devoir bâti en respectant un certain nombre de conditions et un regard particulier porté sur les productions des élèves peuvent permettre de garder mémoire des réussites au niveau des huit items C1, C2, C3, C4, D1, D2, D3 et D4 pour une majorité d'élèves

Le nouveau regard porté sur les copies de quelques élèves lié à la nécessité d'y rechercher les compétences montrées ne peut qu'influencer les barèmes qui portent la note dans les directions voulues : plutôt valoriser les compétences montrées que pénaliser les manques. On atténuera sans doute ainsi, au moins en partie, les effets néfastes d'une évaluation chiffrée.

Chaque trimestre, il est possible de disposer d'au moins trois évaluations de ce type. Grâce à une telle thésaurisation des réussites, le professeur de mathématiques peut participer de façon sereine à la prise de décision collective de validation de la compétence 3 en disposant pour la majorité de ses élèves d'une information solide et étayée : des élèves qui ont montré C1, C2, C3, C4 à plusieurs reprises et dans des contextes différents, des élèves qui ont montré des manifestations positives et régulières de D1, D2, D3, D4.

En élaborant des textes de devoirs qui respectent certaines conditions, en étant attentif à la cohérence d'ensemble qui est donnée à ces travaux et en adoptant lors des corrections une stratégie simple de thésaurisation des réussites des élèves sur huit items, il est possible de disposer, pour la majorité des élèves, d'une information solide et étayée sur la maîtrise des attendus de la compétence 3.

Dans la suite de l'année, les élèves fragiles qui auront été repérés lors de cette première phase de l'évaluation devront être accompagnés de façon plus spécifique en classe et observés plus finement. Pour ces quelques élèves, d'autres formes d'évaluations devront compléter les informations données par les devoirs. Par exemple un élève dyslexique aura sans doute plus de facilité à montrer C4 à l'oral qu'à l'écrit.

5. Comment cueillir les réussites des élèves qui restent en difficultés sur les contrôles ?

Il ne faut surtout pas perdre de vue que les pistes proposées dans la suite du texte sont ouvertes pour quelques élèves par classe, **ceux pour lesquels les devoirs décrits au 4. n'ont pas permis d'obtenir suffisamment d'informations positives sur la maîtrise des compétences du socle.** Il s'agit donc de trouver, pour ces quelques élèves, dans le quotidien de la classe, des moments propices à la poursuite de l'évaluation de ces compétences

On pourrait imaginer d'observer ces élèves de façon privilégiée, un peu tout le temps, pendant toutes les activités menées en classe, pour les surprendre en train de faire preuve de telle ou telle compétence au cours d'une recherche, d'un échange avec un camarade... Mais, un tel travail d'observation pourrait présenter le risque de se faire au détriment d'un bon pilotage de la classe. Introduire une nouvelle notion en donnant place à une véritable activité mathématique pour tous,

proposer un travail de recherche en différenciant l'accompagnement... sont autant de moments en classe qui requièrent une très grande disponibilité du professeur, une très grande concentration qui peut être incompatible avec la conduite en simultané d'une observation évaluatrice, même si cette attention ne porte que sur quelques élèves seulement.

On peut pourtant, au sein des pratiques habituelles, trouver dans le quotidien de la classe de petits moments de disponibilité et des occasions pour une évaluation des compétences de quelques élèves fragiles.

5. 1. Les activités rapides¹⁰ de début de séance

On peut, de temps en temps, utiliser les activités rapides de début de séance pour compléter la prise d'informations nécessaire à l'évaluation des compétences de certains élèves. Il n'est bien sûr pas question de le faire à chaque séance car les objectifs de ce temps de travail sont divers et certains ne peuvent pas être atteints quand l'attention du professeur se porte trop particulièrement sur trois ou quatre élèves.

Dans l'exemple qui suit, on peut constater que cette piste de travail est de nature à être explorée assez facilement. Elle ne nécessite pas une grande expérience de la différenciation pédagogique, ni de grands bouleversements dans les pratiques habituelles.

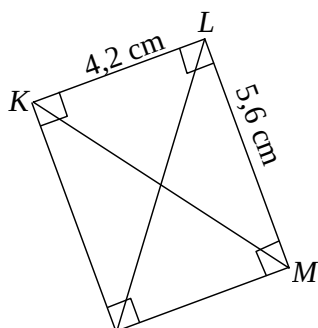
Un exemple

Au début d'une séance de 4e, au cours d'une période où aucun travail particulier n'est fait sur les théorèmes de géométrie ou sur les propriétés des figures planes, le professeur propose aux élèves de calculer trois longueurs. Il indique que le travail se fait en temps limité et que chacun calcule les longueurs de son choix dans le temps imparti.

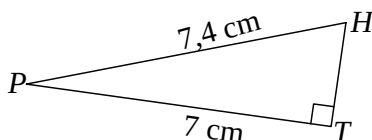
La capacité principale du socle qui est en jeu ce jour-là est :

Utiliser les propriétés d'une figure et les théorèmes de géométrie plane pour traiter une situation simple.

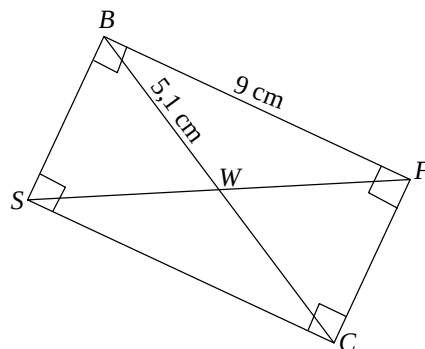
Les élèves n'ont rien à rédiger. L'attendu est simplement qu'ils écrivent leurs trois résultats sur leur cahier de recherche.



$KM = \dots\dots\dots \text{ cm}$



$HT = \dots\dots\dots \text{ cm}$



$BC = \dots\dots\dots \text{ cm}$

¹⁰ Voir la description des activités rapides dans le volet « formation »

Le professeur a prévu que le temps réservé à l'activité rapide de début de séance aurait pour objectif, ce jour-là

- d'entretenir une compétence acquise par la grande majorité des élèves pour éviter qu'elle ne s'affaiblisse ;
- d'évaluer cette compétence pour trois élèves qui, jusque là, ont eu du mal à en témoigner dans les devoirs de contrôle.

Il va donc organiser le travail de la façon suivante :

Phase 1 : Travail individuel

Les élèves travaillent individuellement sur leur cahier de recherche. Il ne leur est pas permis de solliciter le professeur.

Le professeur observe les trois élèves « en évaluation ». Eventuellement, il les accompagne

- en les questionnant de façon ouverte sur leur démarche ;
- en menant de petites interviews pour comprendre la nature des blocages.

Il repère leurs réussites.

Phase 2 : Plénière

Le professeur fait un sondage pour savoir combien de longueurs ont été calculées par chacun : c'est une forme de reconnaissance du travail accompli qui engage chacun à faire de son mieux, même si le professeur ne regarde pas tous les cahiers pendant la phase de travail individuel.

Puis, le professeur sollicite les élèves pour qu'ils explicitent ce qu'ils ont fait. Il choisit de privilégier les prises de parole des trois élèves « en évaluation », et parmi ceux-là, il s'intéresse plus particulièrement à ceux qui ont habituellement du mal dans le passage à l'écrit. Formuler correctement à l'oral ce qu'il a fait permet à un élève de montrer C4.

Les autres élèves sont invités à compléter une explication, reformuler un énoncé de théorème, analyser une erreur...

A la fin de la plénière, le professeur refait un sondage pour savoir combien d'élèves ont réussi chacun des exercices et obtenir, ainsi, une information précieuse pour le pilotage des séances à venir.

Puis, après avoir engagé les élèves dans la tâche suivante, il note rapidement qu'aujourd'hui Amélie a montré C3 et C4 et un attendu de D3.

	D1	D2	D3	D4	C1	C2	C3	C4
Amélie			28/03				28/03	28/03
Djamel								
Cédric								

L'habitude est prise d'observer finement les élèves au travail pour faire des choix didactiques appropriés et apporter des aides adaptées. Au cours des activités rapides de début de séance, on peut parfois cibler quelques élèves en difficulté pour repérer dans leur travail les manifestations de compétences du socle qu'ils n'ont pas montré dans leurs devoirs de contrôle.

5. 2. Exploitation d'écrits obtenus à l'occasion d'un travail en classe

Les élèves ont souvent l'occasion de produire des écrits en classe. Dans les pratiques habituelles, ces écrits restent la plupart du temps de nature privée, sur les cahiers de recherche ou les cahiers d'exercices. On en voit des extraits quand on circule dans la classe. En général, ces écrits servent d'appui à chaque élève pour un travail collectif en plénière, qu'il s'agisse de mutualiser les pistes de recherche, de réguler le travail ou d'en faire une synthèse.

En demandant, de temps en temps aux élèves, de plutôt travailler sur une feuille libre que l'on pourra relever, il est possible de se donner une occasion de compléter les évaluations pour certains élèves. Le travail relevé ne donne alors pas lieu à une notation, ni à une annotation systématique pour chaque élève. Cependant, une simple lecture rapide de toutes les feuilles peut permettre, à la séance suivante, de mieux piloter la plénière de synthèse qu'une simple prise d'informations en circulant dans la classe. D'autre part, une lecture détaillée de trois ou quatre copies d'élèves fragiles peut permettre un repérage de compétences en vue d'une évaluation.

Cette piste de travail peut être explorée de façon très économique. Elle ne nécessite pas de demander aux élèves de travailler de façon inhabituelle mais simplement de changer de support. En outre, la lecture des productions peut être faite rapidement pour l'ensemble, l'analyse portant sur quelques copies seulement.

Un exemple

Deux exercices sont posés à des élèves de 4^e.

1. J'achète 2 kg 500 de pommes de terre pour 3 € 25.
Combien paiera le client suivant pour 1 kg 600 ?
2. Un bébé pèse 4,5 kg à 3 mois.
Quel sera son poids à 6 mois ?

Les élèves travaillent individuellement pendant une dizaine de minutes : ils doivent rédiger leur solution sur une feuille (il leur est bien précisé qu'il ne s'agit pas d'une interrogation écrite, mais d'un travail préparatoire à une concertation en petits groupes).

Ce travail individuel est suivi d'un travail en petits groupes avec production d'un écrit collectif sur transparents. Les groupes ont pour consigne de collecter toutes les démarches qui leur semblent correctes.

La plénière destinée à l'étude des transparents sera l'occasion de mutualiser toutes les démarches, de les expliciter et de les comparer pour que chacun enrichisse ses représentations de la proportionnalité.

La consigne a été donnée de ne pas retoucher les productions individuelles. Cela permet au professeur de les relever pour repérer ce qui peut être évalué positivement dans le cadre de la proportionnalité pour quelques élèves fragiles (ou pour tous, s'il le souhaite).

Remarque : les élèves fragiles peuvent être « accompagnés » dans leur travail individuel, un peu comme au 4. Temps n°3

En outre, si on a du mal à interpréter certaines productions, on peut différer l'évaluation et interviewer l'auteur à la séance suivante.

Quelques productions d'élèves :

1) 2 kg 500 de pommes coûte 3€25 on cherche le prix de 1kg 600.
~~2500~~ $3,25 \div 2500$ je ne sais pas!
 2) On ne peut pas savoir ça dépend de plusieurs choses!

On a la possibilité d'interviewer l'élève :
 Qu'est-ce qui bloque : le traitement technique de la division ? Non !
 Il trouve 0,0013 mais il ne sait pas interpréter le prix au gramme obtenu.
 Il ne sait pas probablement pas écrire $2\text{kg}500 = 2,5 \text{ kg}$
 Le comportement à la question 2 est intéressant. On peut lui demander à l'oral d'explicitier ce qu'il veut dire.

1. 2kg500 représente 3€25.
 $3,25 \div 5 = 0,65\text{€}$
 Alors 500 g représente 0,65€.
 $0,65 \div 5 = 0,13\text{€}$
 donc 100 g représente 0,13€.
 $500 \times 3 = 1500$
 alors $0,65 \times 3 = 1,95$
 $1500 + 100 = 1600$
 Alors $1,95 + 0,13 = 2,08$
 Le client paiera 2,08€ pour 1kg 600 de pomme de terre.
 2. On ne peut pas savoir. Ce n'est pas obligé que ça soit $\times 2$. car il peut peut-être plus grossir ou même grossir.

Un élève fragile qui, dans un contexte de travail plus serein pour lui que celui d'un contrôle a là une excellente occasion de montrer positivement C1, C2, C3 et même C4.

1.

	$\div 1,5$	
Prix	2,5 kg	1,600
	3€25	2,1

 $\div 1,5$
 Le client paiera 2,4€ pour 1,600 kg.
 2. On ne peut pas savoir car le poids n'est pas proportionnelle aux temps.

$2,5 \div 1,6 = 1,5625$ considéré par l'élève comme peu différent de 1,5

Contexte pertinent de mobilisation de stratégies relevant de la proportionnalité reconnu.

Stratégie de calcul du « coefficient de linéarité » correcte et coefficient correctement mobilisé.

$3.25 \div 1,5 = 2,16667$ considéré par l'élève comme peu différent de 2,1

Un élève qui trouve là une occasion de montrer positivement C1 et C3.

6. Evaluer en dehors des devoirs de contrôle.

On peut aussi évaluer au cœur même d'un travail de recherche individuelle ou en groupes. Cependant, une telle pratique d'évaluation nécessite une certaine expertise professionnelle, même si l'évaluation ne concerne qu'un tout petit nombre d'élèves. Sans doute, faut-il l'envisager dans un premier temps à petits pas, la tester à petite dose pour se faire la main. Cela nécessite de mener de front deux tâches professionnelles : l'accompagnement de la classe dans les différentes phases d'une recherche et l'évaluation de quelques compétences pour quelques élèves.

On sait que la classe a une autonomie très variable selon les activités de recherche proposées. Par exemple, il est plus délicat de mener de front accompagnement et évaluation dans une activité qui fait appel à des savoirs en construction que dans des activités qui requièrent des savoirs solidement installés dans la classe.

On sait aussi que certains problèmes sont construits de telle sorte que la majorité des élèves puissent travailler en autonomie pendant un certain temps avant de se trouver devant l'obstacle tandis que d'autres problèmes vont nécessiter des régulations collectives régulières. Ce sera plus facile de trouver un peu de disponibilité pour une tâche d'évaluation dans les premiers que dans les seconds. Par ailleurs, ce sera aussi moins difficile de mener cette expérience quand on connaît assez bien le comportement habituel devant le problème en jeu pour pouvoir anticiper les moments de disponibilité pour l'accompagnement des élèves fragiles.

Dans les premiers essais, on peut réduire le nombre d'élèves à observer particulièrement, voire s'exercer d'abord avec un seul d'entre eux.

A quels moments peut-on être un peu disponible pour cela ?

- Pendant une phase de travail individuel

Quand les élèves sont mis en situation de résoudre un problème il est souhaitable d'organiser d'abord une phase de travail individuel. Une fois que l'on s'est assuré que tous les élèves sont au travail, on peut s'intéresser de façon plus particulière aux élèves qui ont du mal à s'exprimer ou à montrer ce qu'ils savent faire lors des devoirs de contrôle. Par exemple un élève qui reformule bien la consigne et qui montre qu'il comprend ce qui lui est demandé peut à cette occasion montrer C1.

Laisser à certains élèves un peu d'autonomie, tout en gardant un œil sur l'ensemble du groupe pour en assurer la bonne conduite, peut les inciter à prendre des initiatives et à se lancer dans une véritable recherche.

On peut être alors un petit peu disponible pour accompagner les plus fragiles. Toutefois assez vite, il faut aller voir ce que l'ensemble des élèves a produit pour pouvoir piloter la classe (faut-il une régulation ? quel est le meilleur moment ?...)

- Pendant les phases d'échanges par deux ou en petits groupes

On peut

- écouter ce qui se dit : un élève fragile, qui explicite à un autre ce qu'il a fait, peut montrer les compétences C3 et C4, par exemple...
- aider à l'explicitation, parfois seulement en aidant à réguler la parole entre élèves : « Jean vous a-t-il dit ce qu'il a fait ? » et on écoute à juste distance...

- Pendant une phase de plénière

On peut

- **proposer prioritairement aux élèves fragiles de s'exprimer sur leurs réussites ou ce qu'ils ont compris et observer des manifestations positives de C4**
- **proposer aussi à ces élèves de s'exprimer sur la solution (juste ou erronée) d'un camarade qu'ils n'ont pas envisagée... Dans ce cas c'est C3 qui est en jeu...**

Un exemple

Au début d'une séance de 4^e, le professeur¹¹ présente à ses élèves le « problème du jour »

J'ai acheté des cahiers à 2€50 l'un et des crayons à 1€20 l'un. J'ai payé 54€30.

La question à étudier vient naturellement des élèves :

« On va chercher combien il a acheté de cahiers et de crayons ».

Le professeur explique à ses élèves qu'ils travaillent seuls pendant un moment et qu'ils peuvent utiliser tous les outils habituels présents dans la classe, y compris les 15 ordinateurs présents.

Les contraintes de travail peuvent changer d'une séance à l'autre. Certaines fois est imposé le fait que les élèves aillent seuls sur les postes. Cette fois-ci, après un temps de recherche individuelle, les élèves sont autorisés à travailler par binôme .

Les 27 élèves se mettent très vite au travail de manière individuelle. Le problème leur paraît accessible. Ils ont vite des idées, font déjà des essais sur leur cahier de recherche. Certains utilisent la calculatrice, d'autres demandent à aller sur le tableur.

Pendant cette phase de travail individuel le professeur peut, très vite, observer des manifestations positives de C3.

Par exemple

- des élèves font des essais avec un nombre donné de cahiers et de crayons mais ils ne gardent pas nécessairement trace leurs essais successifs ce qui aurait rendu impossible une évaluation positive de C3 dans un travail écrit en autonomie.
- Tous ont identifié le nombre maximum de cahiers et de crayons .
- D'autres élaborent déjà une feuille de calcul afin de rationaliser leurs essais.

Lorsque les échanges par deux sont autorisés, les élèves mutualisent leur démarche et leurs premiers résultats. Le professeur a alors, pendant un court moment, la possibilité d'observer des manifestations positives de C1. La mission première du professeur étant d'animer la séance, il s'autorise à n'évaluer de cette façon qu'une partie des compétences et seulement pour un groupe ciblé d'élèves.

Au bout d'un moment une mutualisation en plénière s'avère nécessaire et permet la confrontation des idées trouvées. Le professeur choisit les élèves qu'il interroge de manière à donner à certains une occasion d'exprimer à l'oral leur stratégie et donc de montrer positivement C4.

Un élève est alors conduit à expliquer que, pour lui, il n'y a pas de solution. Il présente à la classe ce qu'il a obtenu au tableur. Cette proposition est soumise à l'analyse de la classe. L'un des élèves identifie la faille du raisonnement conduit : les nombres de crayons et de cahiers ont été supposés égaux. Cette analyse d'erreur est une occasion de montrer C1, C3 et C4.

¹¹ Observation conduite dans la classe de Stéphane PERCOT professeur au collège HAXO de La Roche sur Yon

Les autres ont obtenu une solution. Tout en les félicitant pour cela, le professeur relance la recherche en demandant s'il peut y avoir d'autres solutions. Les stratégies doivent donc évoluer : au tâtonnement doit se substituer l'élaboration d'une stratégie permettant de trouver toutes les solutions, s'il en existe plusieurs.

Les élèves travaillent de nouveau par binôme. Le professeur dispose alors d'un autre moment favorable à la prise d'information sur les compétences.

En fin de séance certains élèves ont trouvé deux solutions et ont la certitude qu'il n'y en a pas d'autres. D'autres sont encore dans la recherche d'une méthode permettant une étude exhaustive.

Les travaux, même inachevés, sont déposés sur un espace numérique de travail. Le professeur les exploitera pour amorcer la séance suivante. En revanche la production d'un binôme ne sera pas exploitée pour une évaluation individuelle. Celle-ci aurait nécessité en effet une observation fine de travail de chacun, ce qui n'est pas faisable pour tous les élèves. Mais si le professeur ne peut se focaliser dans ce cadre que sur un petit groupe d'élèves, il peut en revanche élargir son évaluation à certains items de la compétence 1 (« formuler clairement un propos simple, participer à un débat »), de la compétence 4 (« s'approprier un environnement informatique de travail, créer un document adapté à sa communication »), de la compétence 7 (« s'intégrer et coopérer dans un projet collectif »).

Quelques unes des stratégies trouvées :

crayon	54,3 - prix crayon	cahier
1,20 €	53,10 €	2,5
2,40 €	51,90 €	5
3,60 €	50,70 €	7,5
4,80 €	49,50 €	10
6,00 €	48,30 €	12,5
7,20 €	47,10 €	15
8,40 €	45,90 €	17,5
9,60 €	44,70 €	20
10,80 €	43,50 €	22,5
12,00 €	42,30 €	25
13,20 €	41,10 €	27,5
14,40 €	39,90 €	30
15,60 €	38,70 €	32,5
16,80 €	37,50 €	35
18,00 €	36,30 €	37,5
19,20 €	35,10 €	40
20,40 €	33,90 €	42,5
21,60 €	32,70 €	45
22,80 €	31,50 €	47,5

Un binôme recherche tous les multiples de 1,20€, les soustrait à 54,30 puis recherche le résultat parmi les multiples de 2,50€.

Après avoir trouvé 1 ou 2 solutions par tâtonnement (15 cahiers + 14 crayons et 3 cahiers + 39 crayons), un binôme recherche une stratégie pour étudier tous les cas possibles...

L'idée d'un « grand tableau » apparaît. Sans l'utilisation de \$ dans ses formules les élèves constatent des erreurs et appellent l'enseignant.

Avec l'aide apportée ils cheminent vers la formule du type "B\$7*2,5+\$A8*1,2"

3	nb cray	nb cahier												
3		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	- €	2,50 €	5,00 €	7,50 €	10,00 €	12,50 €	15,00 €	17,50 €	20,00 €	22,50 €	25,00 €	27,50 €	30,00 €
1	1	1,20 €	3,70 €	6,20 €	8,70 €	11,20 €	13,70 €	16,20 €	18,70 €	21,20 €	23,70 €	26,20 €	28,70 €	31,20 €
2	2	2,40 €	4,90 €	7,40 €	9,90 €	12,40 €	14,90 €	17,40 €	19,90 €	22,40 €	24,90 €	27,40 €	29,90 €	32,40 €
3	3	3,60 €	6,10 €	8,60 €	11,10 €	13,60 €	16,10 €	18,60 €	21,10 €	23,60 €	26,10 €	28,60 €	31,10 €	33,60 €
4	4	4,80 €	7,30 €	9,80 €	12,30 €	14,80 €	17,30 €	19,80 €	22,30 €	24,80 €	27,30 €	29,80 €	32,30 €	34,80 €
5	5	6,00 €	8,50 €	11,00 €	13,50 €	16,00 €	18,50 €	21,00 €	23,50 €	26,00 €	28,50 €	31,00 €	33,50 €	36,00 €
6	6	7,20 €	9,70 €	12,20 €	14,70 €	17,20 €	19,70 €	22,20 €	24,70 €	27,20 €	29,70 €	32,20 €	34,70 €	37,20 €
7	7	8,40 €	10,90 €	13,40 €	15,90 €	18,40 €	20,90 €	23,40 €	25,90 €	28,40 €	30,90 €	33,40 €	35,90 €	38,40 €
8	8	9,60 €	12,10 €	14,60 €	17,10 €	19,60 €	22,10 €	24,60 €	27,10 €	29,60 €	32,10 €	34,60 €	37,10 €	39,60 €
9	9	10,80 €	13,30 €	15,80 €	18,30 €	20,80 €	23,30 €	25,80 €	28,30 €	30,80 €	33,30 €	35,80 €	38,30 €	40,80 €

Un élève explique que le nombre de cahiers doit être impair et le nombre de crayons se termine par 4 ou 9. Il construit alors un tableau plus petit

	nb cahier										
nb crayon	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
4	7,30 €	12,30 €	17,30 €	22,30 €	27,30 €	32,30 €	37,30 €	42,30 €	47,30 €	52,30 €	57,30 €
9	13,30 €	18,30 €	23,30 €	28,30 €	33,30 €	38,30 €	43,30 €	48,30 €	53,30 €	58,30 €	63,30 €
14	19,30 €	24,30 €	29,30 €	34,30 €	39,30 €	44,30 €	49,30 €	54,30 €	59,30 €	64,30 €	69,30 €
19	25,30 €	30,30 €	35,30 €	40,30 €	45,30 €	50,30 €	55,30 €	60,30 €	65,30 €	70,30 €	75,30 €
24	31,30 €	36,30 €	41,30 €	46,30 €	51,30 €	56,30 €	61,30 €	66,30 €	71,30 €	76,30 €	81,30 €
29	37,30 €	42,30 €	47,30 €	52,30 €	57,30 €	62,30 €	67,30 €	72,30 €	77,30 €	82,30 €	87,30 €
34	43,30 €	48,30 €	53,30 €	58,30 €	63,30 €	68,30 €	73,30 €	78,30 €	83,30 €	88,30 €	93,30 €
39	49,30 €	54,30 €	59,30 €	64,30 €	69,30 €	74,30 €	79,30 €	84,30 €	89,30 €	94,30 €	99,30 €
44	55,30 €	60,30 €	65,30 €	70,30 €	75,30 €	80,30 €	85,30 €	90,30 €	95,30 €	100,30 €	105,30 €

ANNEXES RELATIVES A LA PARTIE « EVALUATION »

Annexe 1

Enoncé complet du 5^e devoir dont il est question au 4. temps n°2.

Les élèves ont deux séances complètes d'une heure pour faire ce devoir.

QUATRIEME : devoir surveillé n°5

Exercice 1

Développer (si nécessaire) et réduire les formules suivantes (b est un nombre quelconque).

$$b + b \times 2 + 3 + b ; 3 + 4 \times (b + 2) + b \times 3 ; 10 + (b - 5) \times 3 + 2 \times b$$

Exercice 3

Pendant les soldes, un magasin accorde une remise de 15 % sur tous les articles.

Calculer le nouveau prix d'un article qui coûte initialement 90 €.

Exercice 4

Sur les 420 élèves d'un collège, 273 sont demi-pensionnaires.

Calculer le pourcentage de demi-pensionnaires dans ce collège ?

Exercice 2 (sur une feuille à part, sans calculatrice)

Calculer en détaillant les étapes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \times 5 =$$

Exercice 5

	Devoir 1	Devoir 2	Devoir 3	Devoir 4
Note de Rémi	12	15,5	13	
Note de Fatima	10,5	12	6	

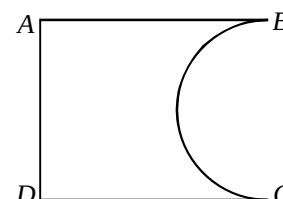
La moyenne trimestrielle de Rémi et Fatima est calculée en faisant la moyenne des quatre devoirs.

1. Quelle sera la moyenne de Rémi s'il a 14 au quatrième devoir ?
2. « En tâtonnant », c'est-à-dire en faisant beaucoup d'essais, Fatima calcule la note qu'elle doit obtenir au quatrième devoir pour que sa moyenne trimestrielle soit 10.
Combien doit-elle trouver ? (sans justification)
Comment aurait-elle pu trouver cette note sans tâtonner ?

Exercice 6

La figure ci-contre est constituée d'un rectangle $ABCD$ percé d'un demi-disque de diamètre $[BC]$ tel que : $AB = 3$ cm et $BC = 2,4$ cm ;

Construire un agrandissement de cette figure tel que la longueur du rectangle agrandi mesure 7,2 cm.

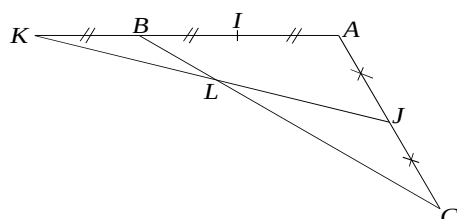


Quelle est la valeur exacte de la largeur du rectangle agrandi ? Justifier la réponse.

Exercice 7

Sur la figure ci-dessous :

- ABC est un triangle.
- I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$.
- K est la symétrique de I par rapport à B .
- La droite (JK) coupe $[BC]$ au point L .



1. Pour prouver que (IJ) est parallèle à (BL) , Claire a écrit la démonstration suivante

Dans le triangle ABC :

I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$

Un théorème permet d'affirmer que : $(IJ) \parallel (BC)$

Or L est sur (BC) donc : $(IJ) \parallel (BL)$.

Enoncer le théorème utilisé par Claire

2. Prouver que L est le milieu de $[KJ]$ en écrivant un pas de démonstration.

Exercice 8

A. Voici un programme de calcul :

- Ajouter 1
- Quadrupler
- Retirer le double du nombre de départ
- Retirer 2

1. Loïc applique le programme au nombre 4. Prouver qu'il trouve 10.
2. Quel nombre trouve-t-il quand il applique le programme au nombre (-3) ?

B. Luc entre un nombre dans sa calculatrice puis utilise les touches suivantes :

×	2	+	3	EXE	−	1	EXE
---	---	---	---	-----	---	---	-----

Luc et Loïc s'aperçoivent qu'il se passe quelque chose de particulier quand ils choisissent tous les deux le même nombre de départ.

1. Conjecturer ce qui se passe en expliquant comment cette conjecture est obtenue
2. Prouver que la conjecture faite est juste.

Barème

Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5	Exercice 6	Exercice 7	Exercice 8
2,5 point	1 point	1,5 point	1 point	2,5 points	2 points	4,5 points	5 points

Annexe 2

Information importante :

En ce début d'année, j'ai pu remarquer que 6 élèves de chacune de mes classes de 5^e sont en grande difficulté.

Pour leur permettre de progresser, je les suis de façon toute particulière en classe et je leur propose de temps en temps de prendre le temps de refaire un travail en « étude-CDI » avec le professeur documentaliste.

En devoir surveillé, ces élèves ont peu d'autonomie quand ils sont livrés à eux-mêmes. Ils ne réussissent pas à montrer ce qu'ils savent faire parce qu'ils lisent mal une consigne ou passent trop de temps sur un exercice difficile ou encore paniquent à la moindre difficulté. J'ai donc décidé de les accompagner dans leur travail, même en contrôle : je les rassure, je les aide à franchir certains obstacles, à choisir les exercices sur lesquels ils peuvent réussir...

Si votre enfant a été accompagné dans le devoir, je vous le signalerai sur sa copie.

Ce protocole a aussi été explicité en classe pour les élèves. Le professeur a répondu sereinement à toutes les questions et travaillé avec les élèves sur la remarque la plus fréquente : « Mais, ce n'est pas juste !... Si vous ne m'aidez pas et que j'ai une mauvaise note ! »

Annexe 3

Voici un extrait du tableau dans lequel les notes sont habituellement saisies par un professeur pour suivre le travail de ses élèves.

Pour remplir le tableau, le professeur relève simplement les notes globales obtenues à chaque exercice (soit environ 15 min de saisie en fin de correction)

	Calcul littéral Ex 1	Calcul numérique. Ex 2	% Ex 3 et 4	Moyenne simple Ex 5	Agrandissement Ex 6	Pb th droite ds milieux Ex 7	Pb Littéral Ex 8	notes
Damien	2,5	1	.	.		4,5	2	17
Pierre	2,5	1	.	.		4	5	19,5
Faustine	0	0	1		!	2	2,5	9
Tony	2,5	1	.			4,5	2,5	17
Guillaume	2	1		1		4,5	1,5	14
Johanna	0,5	1		.	~	0	2	8
Elisa	0	0	.	.	~	3,5	3	11,5
Lorik	0	0	.	1	!	2	0,5	7,5
etc								
	sur 2,5	sur 1	sur 2,5	sur 2,5	sur 2	sur 4,5	sur 5	

Un tel tableau permet déjà un suivi de qualité des apprentissages des élèves et du degré de leur maîtrise de certains points du programme mais il ne rend pas assez compte des réussites montrées par chaque élève sur les huit items qui nous occupent. D'où la nécessité d'aller un peu plus loin, **sans pour autant reprendre toutes les copies..**

La façon dont le devoir a été bâti permet d'exploiter le tableau ci-dessus pour constater qu'un certain nombre d'élèves ont montré des compétences du socle.

Tout d'abord, un élève qui a réussi l'un des exercices 5, 7 ou 8, a indéniablement montré C1, C2, C3 et C4. C'est le cas, dans l'exemple ci-dessus, de tous les élèves sauf Faustine et Lorik.

Autrement dit on peut déjà automatiser une mémorisation du fait que plusieurs élèves ont montré positivement C1, C2, C3 et C4 dans le cadre d'une tâche suffisamment complexe.

	Calcul littéral Ex 1	Calcul numérique. Ex 2	% Ex 3 et 4	Moyenne simple Ex 5	Agrandissement Ex 6	Pb th droite ds milieux Ex 7	Pb Littéral Ex 8	notes	
Damien	2,5	1	.	.		4,5	2	17	C1 C2 C3 C4
Pierre	2,5	1	.	.		4	5	19,5	C1 C2 C3 C4
Faustine	0	0	1		!	2	2,5	9	
Tony	2,5	1	.			4,5	2,5	17	C1 C2 C3 C4
Guillaume	2	1		1		4,5	1,5	14	C1 C2 C3 C4
Johanna	0,5	1		.	~	0	2	8	C1 C2 C3 C4
Elisa	0	0	.	.	~	3,5	3	11,5	C1 C2 C3 C4
Lorik	0	0	.	1	!	2	0,5	7,5	
etc									
	sur 2,5	sur 1	sur 2,5	sur 2,5	sur 2	sur 4,5	sur 5		

Par ailleurs, il est légitime de considérer aussi que les élèves qui ont réussi l'exercice 2 ont montré des attendus de l'item D2. Ceux qui ont réussi au moins un des exercices 3 et 4 ont montré des attendus de l'item D1. De même pour les élèves qui ont au moins 1 point à l'exercice 5 pour avoir calculé la moyenne de Rémi. Les cases correspondantes sont teintées dans le tableau.

	Calcul littéral Ex 1	Calcul numérique. Ex 2	% Ex 3 et 4	Moyenne simple Ex 5	Agrandissement Ex 6	Pb th droite ds milieux Ex 7	Pb Littéral Ex 8	notes	
Damien	2,5	I	.	.		4,5	2	17	C1 C2 C3 C4
Pierre	2,5	I	.	.		4	5	19,5	C1 C2 C3 C4
Faustine	0	0	1		I	2	2,5	9	
Tony	2,5	I	.			4,5	2,5	17	C1 C2 C3 C4
Guillaume	2	I		I		4,5	1,5	14	C1 C2 C3 C4
Johanna	0,5	I		.	~	0	2	8	C1 C2 C3 C4
Elisa	0	0	.	.	~	3,5	3	11,5	C1 C2 C3 C4
Lorik	0	0	.	I	I	2	3	10	
etc									
	sur 2,5	sur 1	sur 2,5	sur 2,5	sur 2	sur 4,5	sur 5		

D1 montré	D2 montré	D3 montré	D4 montré
-----------	-----------	-----------	-----------

D'autres cases peuvent être ainsi teintées, sans qu'il n'y ait nécessité de revenir sur les copies, ce qui permet de thésauriser des réussites sur D1, D2, D3 et D4.

Un devoir bâti en respectant un certain nombre de critères et un tableau analogue à ceux montrés ci-dessus, permettent, sans qu'il n'y ait besoin de faire une double correction, d'automatiser le fait de garder mémoire des réussites au niveau des huit items C1, C2, C3, C4, D1, D2, D3 et D4 d'une majorité d'élèves

A l'issue de ce travail systématique, il ne reste en général qu'une poignée d'élèves pour lesquels il faut davantage d'informations pour être en mesure de dire s'ils ont montré C1, C2, C3 et C4 au sein d'exercices qu'ils n'ont pas complètement réussi. Les copies de ces quelques élèves sont donc en partie à réexaminer, avec pour objectif de repérer au moins une manifestation positive de C1, C2, C3 et C4.

Ainsi, dans la copie de Faustine, trouve-t-on :

Exercice 8:

~~$$(4 + 1) \times 4 - 2 \times 4 - 2 = 4 + 4 - 4 \times 2 - 2$$~~

~~$$= 4 + 4 - 8 - 2$$~~

~~$$= 4 + 3 - 4 \times 2$$~~

1) $4 + 1 = 5$
 $5 \times 4 = 20$
 $20 - 8 = 12$
 $12 - 2 = 10$

2) $(-3) + 1 = (-2)$
 $(-2) \times 4 = (-8)$
 $(-8) - (-6) = (-2)$
 $(-2) - (-2) = 0$

B)

Voici le travail de Lorik pour l'exercice 8

Dans cette première partie, Lorik montre également C1 et C2

En étudiant la suite de la production avec attention (et indulgence pour l'utilisation de la langue), on se rend compte que Lorik a mené un raisonnement correct mais sans recourir au littéral. Il a donc montré sa capacité à raisonner (C3) au cours de ce travail très imparfait.

La colonne de droite du tableau est ainsi complétée.

	Calcul littéral Ex 1	Calcul numérique. Ex 2	% Ex 3 et 4	Moyenne simple Ex 5	Agrandissement Ex 6	Pb th droite ds milieux Ex 7	Pb Littéral Ex 8	notes	
Damien	2,5	I	.	.		4,5	2	17	C1 C2 C3 C4
Pierre	2,5	I	.	.		4	5	19,5	C1 C2 C3 C4
Faustine	0	0	1		I	2	2,5	9	C1 ; C2
Tony	2,5	I	.	.		4,5	2,5	17	C1 C2 C3 C4
Guillaume	2	I		I		4,5	1,5	14	C1 C2 C3 C4
Johanna	0,5	I		.	~	0	2	8	C1 C2 C3 C4
Elisa	0	0	.	.	~	3,5	3	11,5	C1 C2 C3 C4
Lorik	0	0	.	I	I	2	3	10	C1 ; C2 ; C3
etc									
	sur 2,5	sur 1	sur 2,5	sur 2,5	sur 2	sur 4,5	sur 5		

D1 montré	D2 montré	D3 montré	D4 montré
-----------	-----------	-----------	-----------

Il serait bien sûr possible d'affiner le système, pour quelques élèves en grande difficulté, en examinant leur copie en détail, à la recherche d'occasions de teinter, pour eux seulement, la case correspondant à un problème de géométrie non réussi mais dans lequel l'élève a appliqué correctement un théorème (ce qui prouve une connaissance du théorème et la reconnaissance d'un contexte pertinent de son utilisation)... Le faire pour tous serait très long mais, assurer ce suivi pour deux ou trois élèves de la classe peut être envisagé.

Annexe 4

Quelques éléments de réflexions sur la construction et l'évaluation de C1

Il est essentiel de travailler C1 en classe, sur des problèmes contextualisés (voir par exemple dans la banque de problèmes ou dans la banque de situations d'apprentissage et d'évaluation) tout autant que sur des problèmes intra-mathématiques.

En effet quand un problème est contextualisé, les élèves sont souvent amenés à travailler sur une modélisation de la situation, ce qui contribue fortement à donner du sens à l'activité mathématique.

Cependant, sans doute beaucoup plus que la plupart des problèmes purement mathématiques donnés au collège, les problèmes contextualisés requièrent une bonne maîtrise de la langue.

En classe, il est possible de réguler l'avancée du travail par un accompagnement des élèves fragiles pour la prise d'informations et un travail collectif sur le sens des informations. Ainsi, même les élèves qui ne maîtrisent pas suffisamment C1 peuvent-ils ensuite travailler tout de même les compétences C2, C3 et C4.

En évaluation, c'est-à-dire dans un travail réalisé classiquement en complète autonomie, il y va tout autrement : il faut donc prendre soin que la simple lecture ne constitue pas un obstacle si grand que l'élève ne puisse plus montrer aucune autre compétence s'il est fragile sur ce point.

En outre, certaines situations qui semblent concrètes au premier abord, peuvent se révéler très difficiles d'accès si le contexte n'est pas familier à l'élève.

En cours de formation, là encore, on va pouvoir réguler le travail, par exemple en conduisant l'élève à reformuler ce qu'il a compris de l'attendu ou encore en lui proposant des tâches susceptibles de l'aider à s'approprier le contexte qui lui est parfois étranger.

En évaluation, un contexte de la vie courante étranger à l'élève perturbe parfois suffisamment pour que celui-ci renonce immédiatement.

Quand un élève a répondu correctement à la première question au sein d'une tâche complexe, on peut sans trop hésiter noter qu'il a montré C1, **même si la tâche complète n'est pas menée à son terme.** *(se reporter aux exemples de la partie 4 : moyenne et programme de calcul)*

En formation, on peut proposer aux élèves une tâche complexe en posant une question ouverte unique.

Ainsi, l'exercice 8, donné en formation, deviendrait, par exemple :

Exercice 8

Loïc applique un programme de calcul à des nombres :

- Ajouter 1
- Quadrupler
- Retirer le double du nombre de départ
- Retirer 2

Luc entre les mêmes nombres que Loïc successivement dans sa calculatrice puis utilise les touches suivantes de sa calculatrice :

×	2	+	3	EXE	−	1	EXE
---	---	---	---	-----	---	---	-----

Que va-t-il se passer ?

Il en va autrement en évaluation à moins qu'un accompagnement soit prévu. En effet, devant une question unique très ouverte, un élève fragile non accompagné risque de ne pas pouvoir montrer ses compétences, en particulier C1. Dans ce cadre prévoir, à l'entrée d'une tâche complexe, et à destination des élèves les plus fragiles, une question simple visant à repérer la compétence C1 est donc indispensable avant de proposer une question plus ouverte. Le plus souvent, une simple amorce du travail sur cette question, même avec des résultats erronés suffit alors à témoigner que C1 est montrée. *(exemple dans la partie 4)*