– Réunion salle maths expertes –

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 non premier possède un plus petit diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
$n \geqslant 2$ et n est un nombre non premier. L'ensemble de ses diviseurs contient 1, n et au moins un autre élément, on note p le plus petit de ces éléments.

- À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que p est nécessairement premier.
- On sait que $n = p \times q$ avec $1 < p \leqslant q$ par définition de p. Après avoir multiplié chaque membre de l'inégalité par p, montrer que $p \leqslant \sqrt{n}$.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Il existe une infinité de nombres premiers et donc il n'y a pas de plus grand nombre premier.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
On raisonne par l'absurde. L'ensemble fini des nombres premiers peut alors s'écrire $\{p_1 ; p_2 ; p_3 ; \cdots ; p_n\}$

- Expliquer pourquoi le nombre $a = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$ possède un diviseur premier.
- Montrer que ce diviseur premier divise aussi 1.
- Conclure.

3 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Si p est un nombre premier et n un entier, alors $n^p \equiv n \; [p]$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
On raisonne par disjonction de cas :

- Si p divise n, donner un diviseur de $n^p - n$ et conclure.
- Si p ne divise pas n, utiliser le petit théorème de Fermat pour conclure.

<u>Source</u> : Barbazo, Hachette, page 167

2ème temps d'échanges : exemple d'activité

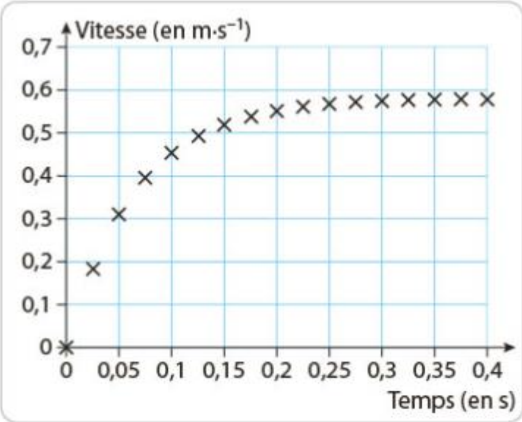
– Réunion salle - 1 maths complémentaires –

Une éprouvette contenant un liquide visqueux sert de support à l'étude de la chute d'une bille en acier.
La bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ et on mesure la vitesse de la bille, représentée ci-après.
On note v la fonction représentant la vitesse, exprimée en $m \cdot s^{-1}$, définie pour tout temps $t \in [0\ ;+\infty[$.

SITUATION 1 Quand on sait résoudre

La bille subit 3 forces lors de l'expérience : son poids, la poussée d'Archimède et les frottements.
On modélise les frottements comme proportionnels à la vitesse de la bille et la 2e loi de Newton permet d'obtenir l'équation différentielle $(E_1) : v'(t) = -15{,}2v(t) + 8{,}89$.

1 On a placé sur le graphique les points correspondants à des mesures effectuées toutes les 0,05 secondes.
a. Tracer l'allure possible de la courbe représentant la fonction v.
b. Commenter l'évolution de la vitesse grâce au graphique ci-contre.



2 Sans résoudre l'équation (E_1), déterminer la valeur de $v'(0)$ et illustrer ce résultat sur le graphique.

3 Déterminer l'expression de v pour tout $t \in [0\ ;+\infty[$.

4 Quelle est la vitesse limite de la bille ?

Source : Belin, manuel-cahier, page 112

– Réunion salle - 2 maths complémentaires –

On souhaite mettre en regard deux modélisations de l'évolution de la taille moyenne d'un poisson, l'une à l'aide d'une suite et l'autre à l'aide d'une fonction.

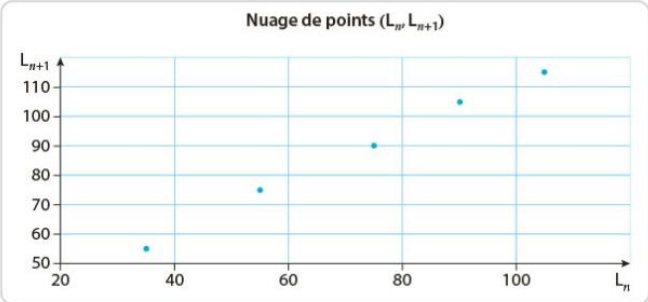
Une étude expérimentale a permis de relever à intervalle de temps constant la longueur moyenne d'une population de thon dans une région.

Âge (en semestres)	1	2	3	4	5	6
Longueur L_n (cm)	35	55	75	90	105	115

PARTIE A Modélisation à l'aide d'une suite

On désire trouver une suite qui modélise la croissance moyenne des poissons. On cherche à trouver une relation de récurrence entre L_{n+1} et L_n puis une expression explicite de L_n.

1 On a représenté ci-dessous le nuage de points $(L_n\,;L_{n+1})$.
Compte tenu de la forme du nuage, quel ajustement peut-on envisager ?



2 Déterminer à la calculatrice ou au tableur la droite de régression qui peut réaliser un ajustement du nuage de points.

3 On modélise désormais la situation à l'aide de la relation de récurrence $L_{n+1} = f(L_n)$ avec $f(x) = mx + p$ et $m = 0{,}859$ et $p = 26{,}170$.

a. Déterminer la solution α de l'équation $f(x) = x$ (arrondir à 1 près).

b. Montrer que $(\alpha - L_n)$ est une suite géométrique et en déduire l'expression de L_n en fonction de n et α.

c. Déterminer la limite de la suite (L_n) et interpréter ce résultat.

PARTIE B Modélisation à l'aide d'une fonction

La modélisation précédente donne l'accroissement de la longueur du poisson sur un intervalle de temps pris comme unité : $L_{n+1} - L_n = (m-1)L_n + p$ pour tout $n \geqslant 1$ avec $m = 0{,}859$ et $p = 26{,}170$.

On veut estimer la longueur à tout instant t à l'aide d'une fonction L, avec L dérivable sur $\mathbb{R}$.

On fait l'hypothèse que, sur tout intervalle de temps Δt, l'accroissement $L(t+\Delta t) - L(t)$ est donné, proportionnellement, par (1) : $\dfrac{L(t+\Delta t)-L(t)}{\Delta t} = (m-1)L(t)+p$.

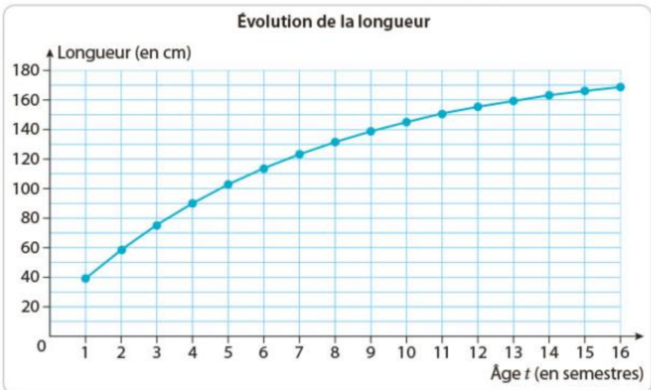
1 En faisant tendre Δt vers 0, montrer que L est solution de l'équation différentielle (2) : $y' = (m-1)\,y + p$.

2 Montrer que la fonction constante égale à α est une solution particulière de (2).

3 Déterminer la solution générale f de l'équation $y' = -0{,}141y + 26{,}17$.

4 Déterminer la solution L qui prend la valeur observée 90 pour $t = 4$.

5 On a représenté la fonction L ci-dessous sur [1 ; 16]. Placer les points $(n\,;L(n))$ obtenus expérimentalement.



<u>Source</u> : *Belin, manuel-cahier, page 110*

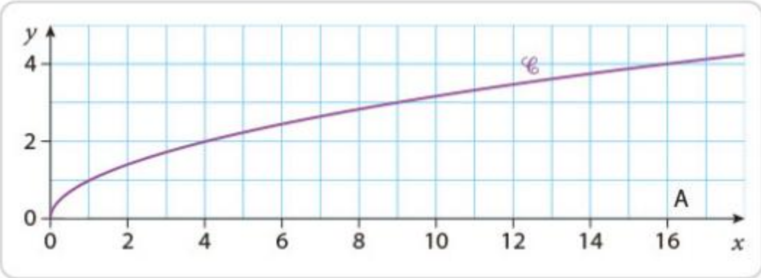
– Réunion salle - 3 maths complémentaires –

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. On veut déterminer l'aire $\mathcal{A}(a)$ sous la demi-parabole $\mathcal{C}$ représentant f entre 0 et a ($a > 0$).
On considère le point $A(a\,;0)$ et pour $n \geqslant 1$:
– les points $A_p(a_p\,;0)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ tels que

$$a_0 = 0 \text{ et } a_{p+1} = a_p + (2p+1)h \text{ avec } h = \frac{a}{n^2}.$$

– les points B_p de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses a_p pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

PARTIE A Cas où $a = 16$ et $n = 4$



1 a. Placer les points A_p et B_p pour $0 \leqslant p \leqslant 4$ sur la figure. Que remarque-t-on sur le point A_4 ?

b. Construire les polygones $A_pA_{p+1}B_{p+1}B_p$ pour $0 \leqslant p \leqslant 3$, puis, par lecture graphique, estimer $\mathcal{A}(16)$.

PARTIE B Retour au cas général

PISTE 1 Approcher $\mathcal{A}(16)$ avec Python

On admet que pour tout $n \geqslant 2$, le point A_n est bien confondu avec A.

1 Compléter le script suivant en Python pour que trapeze(a, n) renvoie la somme S_n des aires des trapèzes (aide sur l'aire d'un trapèze : voir page 133)

```
from math import sqrt

def trapeze(a,n):
  x = 0
  aire = 0
  h = .....................
  for p in range(.......):
      pas = (2*p + 1)*h
      aire = aire + ..............................................
      x = x + ...............
  return aire
```

2 Le tester

3 On admet que la précision obtenue est $\frac{1}{6} \times \frac{a\sqrt{a}}{n^2}$.
À partir de quelle valeur n_0 de n, obtient-on une approximation à 10^{-4} près de $\mathcal{A}(16)$?
Quelle valeur de trapeze (n_0) obtient-on ?

PISTE 2 Détermination de $\mathcal{A}(a)$

1 Démontrer les résultat suivants :

a. Pour $p \geqslant 1$, $1 + 3 + \ldots + (2p-1) = p^2$.

b. Pour $p \geqslant 1$, $a_p = p^2h$.

c. Pour $p \geqslant 1$, l'aire de $A_pA_{p+1}B_{p+1}B_p$ est $\frac{1}{2}h\sqrt{h}(2p+1)^2$.

d. L'aire totale S_n des trapèzes est $\frac{2}{3}a\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

On admettra que $\sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

2 Quelle expression de $\mathcal{A}(a)$ en déduisez-vous ?

Source : Belin, manuel-cahier, page 136