Énig'm@tiques

ACADÉMIE
DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

SEMAINE DES MATHEMATIQUES 2023

Première & Terminale

Solutions

Amuse – Bouches

Somme des carrés de trois nombres impairs

Entrée

Survive or not survive

Plat principal

Balade tétraédrique

Dessert

Distance parcourue par une balle

Boissons

Le verre penché

Amuse - Bouches

Il suffit de résoudre $(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2=p$ où $p \in \{1111; 2222; \dots; 9999\}$.

On a pour$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2=5555$ deux solutions entières dont une est positive : 21.

Les nombres recherchés sont donc 41 ; 43 et 45.

Entrée

Soit L_n, M_n et S_n le nombre respectif de loups, moutons et serpents après n jours.
On a alors :
$M_n = M_{n-1} - L_{n-1}$;
$S_n = S_{n-1} - M_n$;
$L_n = L_{n-1} - S_n$.

On obtient alors :
$S_n + M_n = S_{n-1}$;
$L_n + S_n = L_{n-1}$;
$M_n + L_{n-1} = M_{n-1}$ soit $M_{n-1} = M_n + L_n + S_n$.

On sait que $M_{10} = 1$; $S_{10} = 0$ et $L_{10} = 0$.

Méthode 1 : Avec un tableur, on obtient le résultat suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**moutons**	**loups**	**serpents**		
2	après	10	jours	1	0	0	début jour	11
3	après	9	jours	1	0	1	début jour	10
4	après	8	jours	2	1	2	début jour	9
5	après	7	jours	5	3	4	début jour	8
6	après	6	jours	12	7	9	début jour	7
7	après	5	jours	28	16	21	début jour	6
8	après	4	jours	65	37	49	début jour	5
9	après	3	jours	151	86	114	début jour	4
10	après	2	jours	351	200	265	début jour	3
11	après	1	jour	816	465	616	début jour	2
12			**Départ**	**1897**	**1081**	**1432**	début jour	1

Méthode 2 : avec un algorithme

```
n =10
M = 1
L = 0
S = 0
Pour i allant de 0 à n - 1
     P ← M
     Q ← L
     R ← S
     M ← P+Q+R
     L ← Q+R
     S ← P+R
Fin pour
Afficher M, L et S
```

Plat principal

Après chaque déplacement, on peut constater qu'il y a 3 états possibles après le déplacement n°i

- A_i = {Les personnages sont sur 3 emplacements différents}
- B_i = {2 personnages sont sur un même emplacement et le 3ème sur un autre emplacement}
- C_i = {Les 3 personnes sont sur le même emplacement}.

A l'aide d'un arbre de dénombrement, on a : $P(A_1) = 11/27$; $P(B_1) = 15/27$; $P(C_1) = 1/27$.

Toujours à l'aide d'un arbre de dénombrement, on a :

$P_{C1}(C_2) = 3/27$; $P_{B1}(C_2) = 2/27$; $P_{A1}(C_2) = 1/27$.

$\{A_i, B_i, C_i\}$ forme un SCE donc en utilisant la formule des probabilités totales, on a $P(C_2) = 44/729$

La probabilité cherchée est donnée par :

$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = 1/27 + 44/729 - 3/729 = 68/729 < 0,1$

Dessert

Méthode 1 :

Soit (d_n) la distance entre les deux parois au nième passage de la balle.

On a : $d_0 = 100$ et $\begin{cases} d_{n+1} = 15 \times t & (1) \\ d_{n+1} = d_n - 20 \times t & (2) \end{cases}$

(1) et (2) impliquent que :

$$d_{n+1} = d_n - \frac{20}{15} \times d_{n+1}$$

Donc :

$$d_{n+1} = \frac{3}{7} \times d_n$$

(d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{7}$ et de premier terme $d_0 = 100$ donc pour tout entier n, on a :

$$d_n = 100 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} d_n = 100 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 - \frac{3}{7}} = 100 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n}{\frac{4}{7}}$$

(S_n) est une suite croissante majorée donc convergente.

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 175$$

La distance d_0 n'étant jamais parcourue, la balle parcourt 75 m.

Méthode 2 :

Chacune des deux parois parcourt 50 m à la vitesse de 10 m/s donc le temps écoulé est 5 s.

En 5 s, la balle parcourt 75 m.

Boissons

D'après les données de la figure, le triangle ABC est rectangle en B et $AB = \frac{AC}{2}$.

Alors, on a : $\cos(x) = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ soit : $x = 60°$.

Autrement dit, on peut pencher le verre à 30° par rapport à la verticale.