ACADÉMIE DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

Semaine nationale des mathématiques 2022

Mathématiques en forme(s)

Activité pour la liaison CM1 CM2 - 6^{e}

Descriptif de l'activité :

On s'intéresse aux alvéoles des ruches des abeilles pour leur forme hexagonale.

Les alvéoles que l'on trouve dans les ruches des abeilles servent à stocker le miel, le couvain (œufs, larves et nymphes) et le pollen. Elles ont une forme hexagonale. L'hexagone régulier est, en effet, la forme géométrique qui permet de recouvrir complètement une surface plane avec un périmètre minimal.
Dans les ruches, cette forme permet donc de minimiser la quantité de cire nécessaire pour obtenir un alvéole d'une surface donnée.
Le problème proposé aux élèves est découpé en 4 épisodes. Il peut ainsi soit se traiter en une séance ou soit être échelonné sur la semaine en résolvant chaque jour une étape.

Vous trouverez ci-dessous une fiche professeur qui explicite les objectifs et propose des pistes de mise en œuvre ainsi que la fiche élève.

Cette activité peut être proposée en regroupant deux classes de CM2 et 6^{e} . Elle peut aussi être un support à une action du conseil école-collège qui pourra se dérouler à un tout autre moment de l'année.

Notions et compétences mathématiques mobilisées :

Calculs (mental ou en ligne ou posé ou instrumenté), **Longueur et périmètre** (Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure (par exemple en utilisant une ficelle, ou en reportant les longueurs des côtés d'un polygone sur un segment de droite avec un compas). Notion de longueur : cas particulier du périmètre. Unités relatives aux longueurs.), **Aires** (Différencier périmètre et aire d'une figure. Déterminer la mesure de l'aire d'une surface en utilisant une formule. Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un disque.)

Chercher : S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.
Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.
Calculer : Calculer avec des nombres décimaux de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).
Contrôler la vraisemblance de ses résultats.
Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.
Communiquer : Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Déroulement :

- L'énoncé est proposé sous forme d'une vidéo à visionner en classe. Cette vidéo est disponible sur le site planète maths. Elle fournit des indications visant à engager les élèves sur des pistes de résolution. Les élèves pourront visionner plusieurs fois la vidéo si besoin. Les 3 premiers épisodes concernent la forme des alvéoles. Le dernier, leur dénombrement.
  Pour chaque épisode, il s'agira d'interrompre le visionnage selon les indications données dans la fiche professeur pour permettre aux élèves de répondre à la question posée avant de passer à la suite. La reprise du visionnage, débute par la solution au problème posé dans l'épisode précédent avant qu'Amédée et Gugusse ne prolongent le questionnement.
  Une séance de 1h semble adaptée pour traiter les 4 épisodes du problème et organiser une mise en commun.
- La mise en commun permettra aux élèves d'exprimer leurs stratégies et de confronter leurs procédures.

Fiche professeur

Des mathématiques dans les ruches des abeilles

- **Le problème**

Cf fiche élève ci-dessous

- **Modalités de travail et commentaires**

Les 4 épisodes peuvent se traiter à la suite en une seule séance ou bien donner lieu chacun à un travail journalier durant la semaine des mathématiques.

Dans **l'épisode 1** (Vidéo du début jusqu'au premier message « À vous de jouer » à 3 :40), on travaille sur des **formes rectangulaires**. L'objectif de ce sous-problème est de faire prendre conscience aux élèves que des rectangles de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre. Cela n'est pas intuitif pour tous les élèves. Beaucoup pensent, par exemple, que aire et périmètre varient dans le même sens c'est-à-dire que plus l'aire est grande, plus le périmètre est grand ou plus l'aire est petite, plus le périmètre est petit.
La démarche consiste à conjecturer le résultat en comparant les périmètres de plusieurs rectangles d'aire 100 cm². C'est une démarche expérimentale.
Il faut donc d'abord trouver des dimensions possibles pour un rectangle d'aire 100 cm² (travail de calcul : diviseur de 100, tables) : des rectangles de cotés 1 cm x 100 cm ; 2 cm x 50 cm ; 4 cm x 25 cm ; 5 cm x 20 cm ; 10 cm x 10 cm mais aussi avec des valeurs décimales 8 cm x 12,5 cm ; 16 cm x 6,25 cm etc.
Pour chacun, on calcule le périmètre (formule) et par comparaison on retient le rectangle qui donne le périmètre minimal.
Il n'est pas possible, pour des élèves de cycle 3, de prouver que le carré de côté 10 cm est bien le meilleur candidat. Il s'agira de demander aux élèves de l'admettre.
Il est intéressant de laisser les élèves trouver plusieurs rectangles possibles. Pour relancer la recherche des élèves les plus rapides, on pourra les inviter à chercher des rectangles de dimensions décimales non entières, comme ceux proposés par Amédée.
Ensuite, pour le calcul des périmètres, les élèves pourront se répartir la tâche en prenant en charge chacun quelques calculs seulement.

La solution : Le rectangle d'aire 100 cm² ayant le plus petit périmètre possible est le carré de coté 10 cm.
Trace écrite à noter dans les cahiers des élèves : On retient donc de cette première étape que si les alvéoles des ruches étaient rectangulaires, les abeilles auraient choisi de les faire de forme carrée, afin de consommer le moins de cire possible.

Après « À vous de jouer », débute **l'épisode 2** (découpé en 3 phases : de 3:40 à 5:30 puis de 5:30 à 6 :35 puis de 6 :35 jusqu'à Quelques instants plus tard à 7 :05) qui concerne les **formes circulaires**. On commence par corriger l'exercice donné en épisode 1. Amédée explique qu'un carré est bien un rectangle (puisqu'il s'agit d'un quadrilatère ayant 4 angles droits, c'est un rectangle particulier). En revanche, tout rectangle n'est pas un carré. Ce sera intéressant d'aborder ce point de logique avec les élèves :
Tout carré est un rectangle mais l'affirmation réciproque (Tout rectangle est un carré.) est fausse.
L'objectif de ce second sous-problème est de savoir si une forme circulaire ne serait pas meilleure encore que le carré, c'est-à-dire si avec des alvéoles circulaires la quantité de cire à utiliser pour les parois (c'est-à-dire le périmètre) ne serait pas moindre.
Les élèves doivent donc comparer le périmètre d'un disque d'aire 100 cm² avec celui du carré de coté 10 cm. La vidéo est à interrompre à À vous de jouer à 5 :30.
La démarche : Le rayon est donné par Amédée. Pour les élèves de 6^{e}, il s'agit de calculer la longueur du tour du cercle par la formule.
Pour les élèves de CM, il s'agit de tracer ou construire un cercle d'aire 100 cm² et d'en mesurer la longueur soit en enroulant une ficelle sur le cercle soit en faisant rouler le cercle le long d'une règle (ce qui suppose d'avoir repéré un point de départ sur le cercle).
Solution : on trouve environ 35,2 cm ou 35,4 cm selon la précision choisie pour le rayon. Le périmètre du cercle est donc bien plus petit que celui du carré. Mais alors pourquoi les alvéoles ne sont-elles pas circulaires ?
Quand la correction est faite, on poursuit le visionnage jusqu'à la question « Avez-vous une idée du problème que poseraient les alvéoles circulaires ? » à 6:35.
Dans un deuxième temps, il s'agit, en effet, de faire remarquer aux élèves qu'il n'est pas possible de paver entièrement une surface avec des disques. Il reste de la place perdue quelle que soit la disposition des disques choisie. De plus aucune paroi n'est en commun à deux ou plusieurs disques ce qui consomme également plus de cire.
On pourra fournir aux élèves plusieurs disques pour qu'ils manipulent ou les leur faire tracer au compas sur du papier blanc.
Trace écrite à noter dans les cahiers des élèves : Pour une aire donnée, les alvéoles de forme circulaire ont un périmètre plus petit que ceux de forme carrée. Mais avec des alvéoles circulaires, il resterait des espaces vides entre les alvéoles, dans le cadre de ruche. Cet épisode prend fin à Quelques instants plus tard à 7 :07.

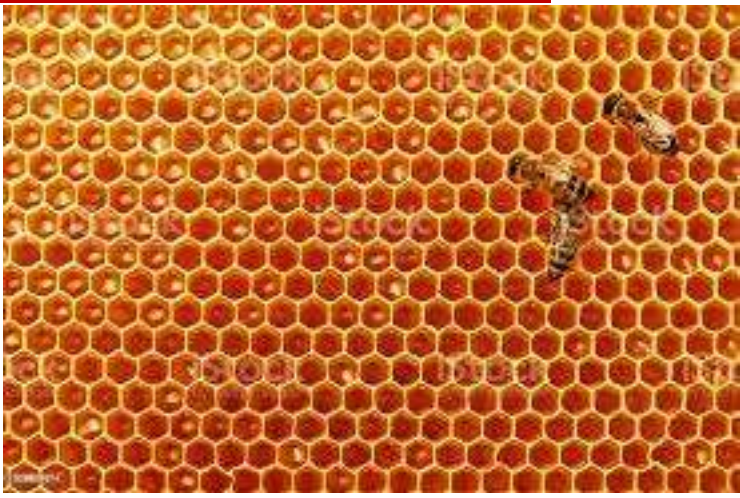
Dans **l'épisode 3**, on s'intéresse aux **hexagones** (on visionne la vidéo de 7 :05 jusqu'à À vous de jouer à 8 :23).
C'est l'occasion de définir un hexagone régulier : un hexagone régulier est un polygone possédant six côtés de même longueur et six angles de même mesure.
La question est énoncée sous une forme ouverte. Les élèves doivent comprendre qu'il s'agit de calculer le périmètre de l'hexagone d'aire 100 cm² pour le comparer à celui du carré de côté 10 cm. Il n'y a pas de formule pour le périmètre, il s'agit de recourir au sens (6 x coté).
Solution : Le périmètre d'un hexagone d'aire 100 cm² est d'environ 6 x 6,2 cm soit environ 37,2 cm. On constate donc que cette forme convient mieux que celle du carré.
Il reste à évoquer la question du pavage. Il est intuitif, à partir de la photo représentant des alvéoles de voir que le pavage d'une surface plane par des hexagones réguliers est possible.

De plus, chaque paroi est commune à deux alvéoles, ce qui limite la quantité de cire nécessaire.
Il faudra demander aux élèves d'admettre que pour des polygones réguliers ayant 5 côtés ou plus de 6 côtés, il n'est pas possible de paver le plan. On pourra éventuellement s'en convaincre à l'aide d'une manipulation de polygones en papier, par exemple (pentagones, polygones à 7 ou 8 côtés…).
Quand la correction est terminée, on reprend le visionnage de 8 :23 jusqu'à « Encore plus tard » à 9 :30 pour une phase de conclusion.
Trace écrite à noter dans les cahiers des élèves : L'hexagone régulier, dont les six côtés ont la même longueur, est la forme géométrique qui permet de recouvrir complètement une surface plane, sans laisser aucun espace vide perdu et en minimisant la quantité de cire nécessaire pour obtenir un alvéole d'une aire donnée : il faudrait plus de cire pour fabriquer les parois d'alvéoles carrés ou triangulaires qui permettraient de stocker la même quantité de miel.
Ce résultat avait été conjecturé dès le IV^{e} siècle par le mathématicien Pappus d'Alexandrie, mais ce n'est que récemment, en 1999, que Thomas Hales a démontré rigoureusement le « théorème du nid d'abeille » qui énonce le caractère idéal de l'hexagone. Les abeilles, sans papier ni crayon, « savent » depuis des millions d'années que c'est la forme qui convient le mieux ! [d'après https://theconversation.com/pourquoi-les-abeilles-sont-bonnes-en-maths-152761]
En prolongement, on pourra demander aux élèves de construire des hexagones.

En prolongement, **l'épisode 4** aborde la question du **dénombrement** (vidéo de 9 :30 jusqu'à la fin).
Il serait trop fastidieux de compter toutes les alvéoles, avec en plus le risque d'en oublier ou de compter plusieurs fois le même alvéole.
La méthode proposée consiste à ne compter les alvéoles que sur une portion réduite par exemple sur un rectangle de dimensions 3 cm x 3 cm puis de multiplier par le coefficient d'agrandissement : dans l'exemple x 9 (en largeur) puis x 14 (en longueur) puisque 27 cm = 3 cm x 9 et 42 cm = 3 cm x 14.
Le travail peut se faire à partir d'une des photos fournies dans l'énoncé.
Amédée reste évasif sur la méthode. Il s'agira d'expliciter avec les élèves le protocole à mettre en place. On pourra comparer les résultats de plusieurs groupes d'élèves.

Fiche élève

Des mathématiques dans les ruches des abeilles



Pourquoi les alvéoles des ruches d'abeilles ont-elles cette forme particulière ?

Pour le comprendre, vous allez résoudre le problème ci-dessous, en 3 épisodes.

Episode 1 : Pourquoi pas des alvéoles de forme rectangulaire ?

Imaginons que les abeilles aient préféré construire des alvéoles de forme rectangulaire. Elles souhaitent utiliser le moins de cire possible pour construire les parois des alvéoles (les murs des chambres) tout en gardant la même aire dans chaque alvéole pour pouvoir stocker la même quantité d'œufs et de miel dans chacune.

Pour que ce soit plus visible, changeons d'échelle et faisons nos calculs pour des alvéoles d'aire 100 cm².

Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire 100 cm² qui a le périmètre le plus petit possible ?

Episode 2 : Pourquoi pas des alvéoles de forme circulaire ?

1) Des alvéoles de forme circulaire auraient-elles un périmètre plus petit encore que le carré ? Les abeilles consommeraient alors moins de cire.
   Pour le savoir, faisons nos calculs pour des alvéoles d'aire 100 cm².
   Une indication : un disque d'aire 100 cm² a un rayon d'environ 5,6 cm (5,64 cm plus précisément).
2) Les alvéoles de forme circulaire présentent un inconvénient. Lequel, d'après vous ?

Episode 3 : Pourquoi des alvéoles de forme hexagonale ?

Observons, le cadre d'une ruche. Les alvéoles ont une forme hexagonale.
Pour des alvéoles d'aire 100 cm², les côtés des hexagones mesurent environ 6,2 cm.
En faisant des calculs, expliquez pourquoi les abeilles ont préféré cette forme.

Episode 4 : Dénombrons les alvéoles

Mais combien d'alvéoles sont contenus dans un cadre rectangulaire de dimensions 42 cm par 27 cm ?