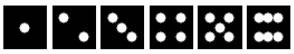
ACADÉMIE
DE GRENOBLE
Liberté
Égalité
Fraternité

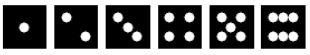
SEMAINE DES MATHEMATIQUES
2021

Une énigme par jour

1ère – Terminale - G

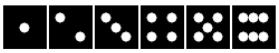
Énigme 1

Pour déterminer s'il est plus rare d'obtenir une suite  *ou un quadruple* *on peut calculer des probabilités.*

Calcul de la probabilité d'obtenir une suite  **:**

L'expérience aléatoire consistant à lancer 6 dés cubiques à 6 faces bien équilibrés a :

$$\overbrace{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}^{6^6} = 46\,656 \text{ issues équiprobables.}$$

Parmi celles-ci, les nombreuses issues qui permettent d'obtenir une suite  sont celles qui comportent chaque face une et une seule fois ; par exemple :

Pour les dénombrer, on peut raisonner sur la « position » de chaque face dans la liste des résultats :

la face peut être réalisée par n'importe lequel des 6 dés $\rightarrow$ 6 choix

la face peut être réalisée par n'importe lequel des 5 dés restants $\rightarrow$ 5 choix

la face peut être réalisée par n'importe lequel des 4 dés restants $\rightarrow$ 4 choix

la face peut être réalisée par n'importe lequel des 3 dés restants $\rightarrow$ 3 choix

la face peut être réalisée par n'importe lequel des 2 dés restants $\rightarrow$ 2 choix

la face ne peut être réalisée que par le dernier dé restant $\rightarrow$ 1 dernier choix

Au total, il y a $\underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 720$ issues qui permettent d'obtenir une suite.

Donc la probabilité d'obtenir une suite est égale à : $\dfrac{720}{46656} \simeq 0,0154 = 1,54\%$ (à $0,01\%$ près).

Calcul de la probabilité d'obtenir un quadruple **:**

L'expérience aléatoire consistant à lancer 4 dés tétraédriques à 4 faces bien équilibrés a :

$$\overbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4}^{4^4} = 256 \text{ issues équiprobables.}$$

Parmi celles-ci, une seule issue permet d'obtenir un quadruple puisque chaque dé doit donner !

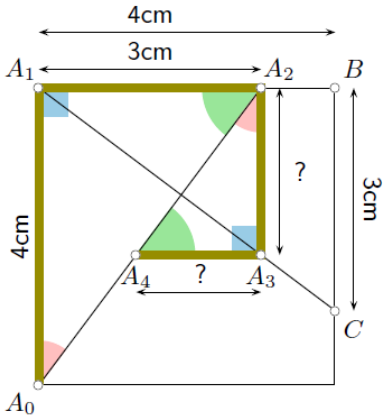
Donc la probabilité d'obtenir un quadruple est égale à : $\dfrac{1}{256} \simeq 0,0039 = 0,39\%$ (à $0,01\%$ près).

Conclusion :

Il est plus rare d'obtenir un quadruple **car sa probabilité est (environ 4 fois) plus petite !**

Énigme 2

Calcul de la distance parcourue par l'araignée lors de son 1er tour : $A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$



On sait que $A_0A_1 = 4\,cm$ et que $A_1A_2 = 3\,cm$. Calculons A_2A_3 et A_3A_4 !

On sait que A_1, A_2 et B sont alignés, A_1, A_3 et C aussi et $(A_2A_3) \,//\, (BC)$ donc d'après le théorème de Thalès :

$\frac{A_1A_2}{A_1B} = \frac{A_1A_3}{A_1C} = \frac{A_2A_3}{BC}$ donc $\frac{3}{4} = \frac{A_2A_3}{3}$ donc $A_2A_3 = 3 \times 3 \div 4 = \frac{9}{4} = 2,25\,cm$

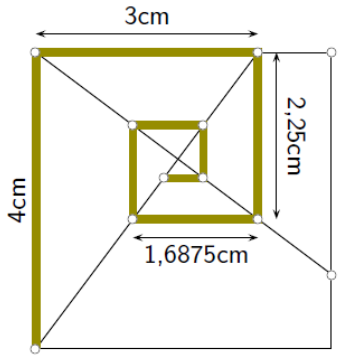
Les triangles rectangles $A_0A_1A_2$ et $A_2A_3A_4$ ont des angles respectivement de même mesure, donc ils sont semblables, donc les longueurs de leurs côtés sont respectivement proportionnelles et on peut écrire :

$\frac{A_0A_1}{A_2A_3} = \frac{A_1A_2}{A_3A_4} = \frac{A_0A_2}{A_2A_4}$ donc $\frac{4}{2,25} = \frac{3}{A_3A_4}$ donc $A_3A_4 = 3 \times 2,25 \div 4 = 1,6875\,cm$

On en déduit la longueur du 1er tour :

$$A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 = 4 + 3 + 2,25 + 1,6875 = 10,9375\,cm$$

Calcul de la distance parcourue par l'araignée lors de ses deux premiers tours :



Observons attentivement les longueurs des quatre premiers segments :

$$A_0A_1 = 4 \qquad A_1A_2 = 3 \qquad A_2A_3 = \underbrace{2{,}25}_{\frac{9}{4}} \qquad A_3A_4 = \underbrace{1{,}6875}_{\frac{27}{16}}$$

Il s'agit des quatre premiers termes de la **suite géométrique** de premier terme 4 et de raison $\frac{3}{4}$!

Lors du deuxième tour, l'araignée se déplace sur deux nouveaux triangles rectangles, semblables aux précédents, réduits d'un facteur $\frac{3}{4}$. La longueur des quatre nouveaux segments est donc donnée par la même suite géométrique et on peut calculer rapidement la longueur des deux premiers tours :

$$4+3+\frac{9}{4}+\frac{27}{16}+\frac{81}{64}+\frac{243}{256}+\frac{724}{1024}+\frac{2187}{4096} = 4\times\left(1+\frac{3}{4}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^7\right) = 4\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^8}{1-\frac{3}{4}} = \frac{58975}{4096} \simeq 14,4\,cm$$

L'araignée ne se reposera donc pas après deux tours car elle n'aura pas parcouru $16\,cm$!

Pour déterminer le nombre N de tours qu'elle doit réaliser avant de se reposer, je cherche le premier entier N tel que :

$$\begin{aligned}
4\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{4N}}{1-\frac{3}{4}} &\geqslant 16\\
4\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{4N}}{\frac{1}{4}} &\geqslant 16\\
16\times\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{4N}\right) &\geqslant 16\\
\underbrace{1-\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{4N}}^{>0}}_{<1} &\geqslant 1
\end{aligned}$$

Impossible ! !

Conclusion :

10, 100, 1 000 ou même un milliard de tours ne suffiront pas ! L'araignée ne parviendra pas à tisser un fil de 16 cm. Condamnée à tisser sans s'arrêter, elle semble piégée dans sa propre toile...

Énigme 3

On souhaite savoir si « $V(U(V(13))) = (((\varepsilon\,13)\,\Omega)\,\Lambda)\,\Lambda$ ».

Calcul de $V(13)$:

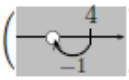
$V(13) =$ $+ V\Big($ $\Big)$ car $13 > 9$

$= 3 + V(1)$ où $V(1) = 1$ car $1 \leqslant 9$

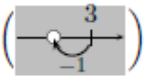
$= 3 + 1$

$= 4$

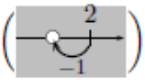
Calcul de $U(\overbrace{V(13)}^{4}) = U(4)$:

$U(4) = 4 \times U\Big($  $\Big)$ car $4 \neq 1$

$= 4 \times U(3)$

$= 4 \times 3 \times U\Big($  $\Big)$ car $3 \neq 1$

$= 4 \times 3 \times U(2)$

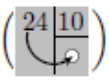
$= 4 \times 3 \times 2 \times U\Big($  $\Big)$ car $2 \neq 1$

$= 4 \times 3 \times 2 \times U(1)$ où $U(1) = 1$

$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 24$

Calcul de $V(\underbrace{U(\overbrace{V(13)}^{4})}_{24}) = V(24)$:

$V(24) =$ $+ V\Big($  $\Big)$ car $24 > 9$

$= 4 + V(2)$ où $V(2) = 2$ car $2 \leqslant 9$

$= 4 + 2$

$= 6$

Donc $V(\underbrace{U(\overbrace{V(13)}^{4})}_{24}) = 6$

Calcul de $U(13)$:

L'avez-vous remarqué ?

$U(4)$ est le produit des entiers compris entre 1 et 4 :

$U(4) = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ (la factorielle de 4, notée $4!$)

De même, on peut montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$U(n) = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ (la factorielle de n, notée $n!$)

En particulier :

$U(13) = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 13 = 6\,227\,020\,800$

Calcul de $V(\overbrace{U(13)}^{6\,227\,020\,800}) = V(6\,227\,020\,800)$:

L'avez-vous remarqué ?

$V(13)$ est la somme des chiffres du nombre 13 : $1 + 3$.

De même, on peut montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $V(n)$ est la somme des chiffres du nombre n.

En particulier :

$V(6\,227\,020\,800) = 6 + 2 + 2 + 7 + 2 + 8 = 27$

Calcul de $V(\underbrace{V(\overbrace{U(13)}^{6\,227\,020\,800})}_{27}) = V(27)$:

D'après ce qui précède :

$V(27) = 2 + 7 = 9$

Donc $V(\underbrace{V(\overbrace{U(13)}^{6\,227\,020\,800})}_{27}) = 9$

Conclusion :

Il est bien sûr incorrect d'écrire que :

$$\text{« } \underbrace{V(U(V(13)))}_{6} = \underbrace{V(V(U(13)))}_{9} \text{ »}$$

mais en retournant le résultat situé dans le membre de droite :

$$\text{« } \underbrace{V(U(V(13)))}_{6} = \overbrace{(((\varepsilon\,13)\,\Omega)\,\Lambda)\,\Lambda}^{6} \text{ »}$$

cette égalité pourrait être acceptée ! !

Énigme 4 (niveau ★)

$V_0 = \pi\, r^2 \times h$

$V_1 = \pi\, (r \times 1{,}01)^2 \times (h \times 0{,}99) = \pi\, r^2 \times h \times 1{,}009899 = 1{,}009899 \times V_0$

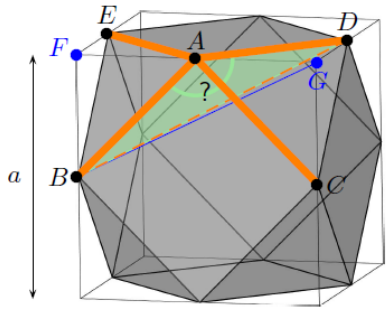
On utilise un programme Python pour déterminer le nombre de jour recherché :

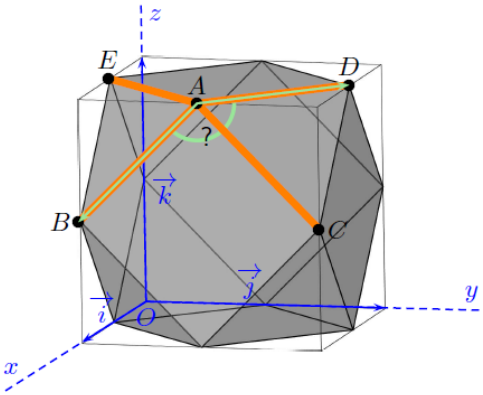
```python
def Python_malade():
    V = 1
    j = 0
    while V < 2:
        V = V * 1.009899
        j = j + 1
    return(j)
```

Donc le 71ème jour le python aura plus que doublé de volume.

Énigme 4 (niveau ★★)

On souhaite déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$. Pour cela, on peut calculer son cosinus !





<u>1ère méthode :</u> en appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABD (niveau Première)

On sait que ABD est un triangle (figure de gauche) donc d'après le théorème d'Al-Kashi :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) \qquad \text{donc} \qquad \cos\left(\widehat{BAD}\right) = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \times AB \times AD}.$$

Pour calculer les longueurs AB, AD et BD, on peut appliquer le théorème de Pythagore dans divers triangles rectangles :

dans ABF rectangle en F : $AB^2 = AF^2 + BF^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ où a est la longueur des arêtes du cube

dans ADG rectangle en G : $AD^2 = AG^2 + DG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

dans BDG rectangle en G : $BD^2 = BG^2 + DG^2 = BG^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = BG^2 + \frac{a^2}{4}$ où BG^2 doit encore être calculé :

dans BFG rectangle en F : $BG^2 = BF^2 + FG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$

donc $BD^2 = BG^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{6a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$

donc $\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \times AB \times AD} = \dfrac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{2}}{2 \times \sqrt{\frac{a^2}{2}} \times \sqrt{\frac{a^2}{2}}} = \dfrac{-\frac{a^2}{2}}{2 \times \left(\sqrt{\frac{a^2}{2}}\right)^2} = \dfrac{-\frac{a^2}{2}}{2 \times \frac{a^2}{2}} = \dfrac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\dfrac{a^2}{2} \times \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{1}{2}$

donc $\widehat{BAD} = \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$.

<u>2ème méthode :</u> en calculant le produit scalaire des vecteurs de l'espace $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ (niveau Terminale)

On sait que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$ donc $\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}}{AB \times AD}$.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$ (figure de droite). Dans ce repère :

$A\,(1\,;0{,}5\,;1)$ donc $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A) = (1-1\,;0-0{,}5\,;0{,}5-1) = (0\,;-0{,}5\,;-0{,}5)$

$B\,(1\,;0\,;0{,}5)$ $\overrightarrow{AD}\,(x_D - x_A\,;y_D - y_A\,;z_D - z_A) = (0{,}5-1\,;1-0{,}5\,;1-1) = (-0{,}5\,;0{,}5\,;0)$

$D\,(0{,}5\,;1\,;1)$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\,x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\,y_{\overrightarrow{AD}} + z_{\overrightarrow{AB}}\,z_{\overrightarrow{AD}} = 0 \times (-0{,}5) + (-0{,}5) \times 0{,}5 + (-0{,}5) \times 0 = -0{,}25$

$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(x_{\overrightarrow{AB}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{AB}}\right)^2 + \left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)^2} = \sqrt{0^2 + (-0{,}5)^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}5}$

$AD = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{\left(x_{\overrightarrow{AD}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{AD}}\right)^2 + \left(z_{\overrightarrow{AD}}\right)^2} = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 0^2} = \sqrt{0{,}5}$

donc $\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}}{AB \times AD} = \dfrac{-0{,}25}{\sqrt{0{,}5} \times \sqrt{0{,}5}} = \dfrac{-0{,}25}{\sqrt{0{,}5}^2} = \dfrac{-0{,}25}{0{,}5} = -0{,}5$

donc $\widehat{BAD} = \text{Arccos}\,(-0{,}5) = 120°$.

Conclusion :

L'angle géométrique $\widehat{BAD}$ mesure exactement $120°$, et comme le cube qui contient le cuboctaèdre est parfaitement symétrique, on pourrait montrer de même que l'angle géométrique $\widehat{CAE}$ mesure aussi $120°$: $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 120°$.

L'avez-vous remarqué ?

La mesure de $\widehat{BAD}$ n'est pas égale à la somme des mesures de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$: $\overbrace{\widehat{BAD}}^{120°} \neq \underbrace{\overbrace{\widehat{BAC}}^{90°} + \overbrace{\widehat{CAD}}^{60°}}_{150°}$! !

C'est une conséquence du fait que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.