

Olympiades de mathématiques 2019

éléments de correction

Exercice 1 La persistance d'un nombre

- a.** Pour 77, on obtient successivement 49 puis 36 puis 18 puis 8. La persistance de 77 est donc 4.

b. Pour 28 534, on obtient 960 puis 0. La persistance de 28 534 est donc 2.

c. Pour 6 785 791, on obtient 105 840 puis 0. La persistance de 6 785 791 est donc 2.
- Conjecture : si au moins un des chiffres du nombre est 0, alors la persistance est 1.
Démonstration : en faisant le produit des chiffres, on obtient 0. Il n'y a donc qu'une seule étape.
-) Si on insère 1 dans le nombre, cela ne change pas le produit de ses chiffres. Le nombre d'étapes reste alors inchangé. Cela ne change donc pas la persistance.
- Le nombre 77 111 111 111 111 111 s'écrit avec 20 chiffres.
D'après la question précédente, la persistance de ce nombre est 4, comme celle de 77.
- Le produit de 5 par un nombre (en l'occurrence un chiffre) pair a 0 pour chiffre des unités. La persistance d'un nombre dont l'écriture comporte un 5 et un chiffre pair est donc au plus 2 (elle est égale à 1 dans le cas où l'écriture comporte aussi un 0).

Exercice 2 La mosaïque de Penthée

- Les réponses suivantes (entre autres) sont acceptées :

 - L'ovale est constitué de 4 quarts de cercle : un quart de cercle de centre O et de rayon 2, un quart de cercle de centre M et de rayon 2, un quart de cercle de centre P et de rayon 1 et un quart de cercle de centre N et de rayon 1.
 - L'ovale est constitué de l'arc de cercle de centre M d'extrémités V et W, de l'arc de cercle de centre N d'extrémités U et V, de l'arc de centre O d'extrémités Z et U et de l'arc de centre P d'extrémités W et Z.

2. Figure.

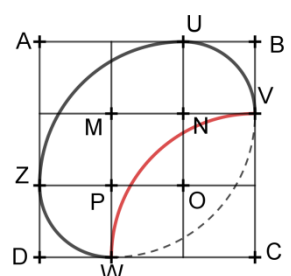
- Le périmètre se compose de deux quarts de cercle de rayon 2 et deux quarts de cercles de rayon 1 :

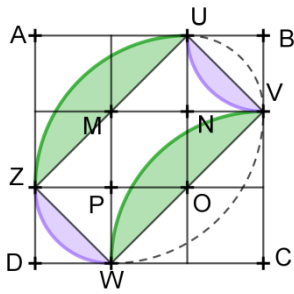
$$p = 2 \times \frac{2\pi}{4} + 2 \times \frac{4\pi}{4} = 3\pi \text{ unités} = 9\pi \text{ cm.}$$

- La surface de l'ovale peut être décomposée en deux quarts de cercles de rayon 1 et deux quarts de cercles de rayon 2 partiellement superposés (la partie commune est un carré de côté 1). Il s'ensuit que l'aire \mathcal{A} s'exprime ainsi :

$$\mathcal{A} = 2 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} + 2 \times \frac{\pi \times 2^2}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi - 1 = \frac{5\pi}{2} - 1 \text{ unités d'aire} = \frac{45\pi}{2} - 9 \text{ cm}^2 \approx 61,69 \text{ cm}^2.$$

- On peut, par exemple, remplacer l'arc de cercle de centre M par un arc de cercle de même rayon de centre C. On obtient la figure de droite. Le périmètre est inchangé et l'aire diminue de l'aire de la surface comprise entre les deux arcs, l'ancien et le nouveau.





6. On peut aussi remplacer l'arc de cercle de centre B par l'arc de centre N limité par U et V. On obtient encore une figure de même périmètre. Les aires des surfaces vertes et les aires des surfaces violettes se compensent. La figure créée a donc la même aire que le rectangle UVWZ. Cette aire a pour mesure 4.

Exercice 3. Code EAN

1. Pour juger de la validité du code 4971850187820, on effectue le calcul :

$$S = 4 + 7 + 8 + 0 + 8 + 8 + 3 \times (9 + 1 + 5 + 1 + 7 + 2) = 35 + 3 \times 25 = 110$$

C'est bien 0 qu'il faut ajouter à 110 pour obtenir un multiple de 10.

2. On fait la même suite d'opérations avec 978204732850C, ce qui donne :

$$S = 9 + 8 + 0 + 7 + 2 + 5 + 3 \times (7 + 2 + 4 + 3 + 8 + 0) = 31 + 3 \times 24 = 103.$$

Cette fois, c'est 7 qu'il faut ajouter. $C = 7$.

3. Le calcul fait à partir de 32525x7041767 donne

$$S = 3 + 5 + 5 + 7 + 4 + 7 + 3 \times (2 + 2 + x + 0 + 1 + 6) = 31 + 3 \times (11 + x) = 64 + 3x.$$

Si on additionne 7 à ce total, on doit trouver un multiple de 10, donc $71 + 3x$ est un multiple de 10.

Finalement $x = 3$.

4. $S = 3 + 4 + 2 + 8 + 8 + 9 + 8 + 3 \times (7 + 2 + 7 + 0 + 5 + 5) = 42 + 3 \times 26 = 120$

Si on remplace le premier chiffre, 3, par x , et le deuxième, 7, par y , la somme S s'écrit :

$$S = 120 - 3 - 3 \times 7 + x + 3y = 96 + x + 3y.$$

Cherchons x et y pour que le code $xy42278085958$ soit valide.

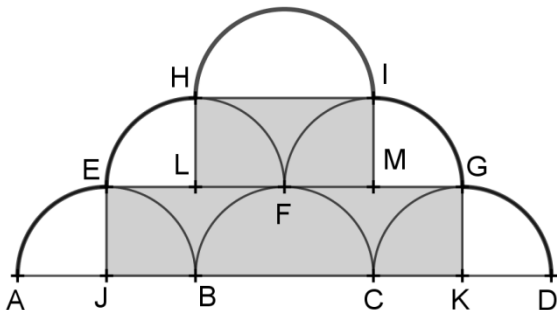
On calcule $S = 88 + x + 3y$.

Pour chaque valeur de y , cherchons la (ou les) valeur(s) de x (si elle existe).

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	4	1	8	5	2	9	6	3	0	7

Ainsi, on peut remplacer les 2 premiers chiffres (37) par 40 ; 11 ; 82 ; 53 ; 24 ; 95 ; 66 ; 08 ; 79.

Exercice 4. Six demi-cercles



Le domaine peut être décomposé en 6 quarts de disques de rayon 1 et six carrés de côté 1 (grisés).

L'aire totale peut s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{6}{4}\pi + 6 = \frac{3}{2}\pi + 6$$