Olympiades inter-académiques de mathématiques
Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 27 mars 2018

Des éléments de corrigé

==

Exercice 1
Développement décimal

1. On note que la 2°, la 5° , la 8° sont 3. Donc de proche en proche, la 50° est un 3 et la 52° est donc un 7
2. La période est formée de 461538 donc de 6 chiffres. En utilisant le même principe que précédemment, on note que la 1°, la 7°, la 13° décimale est un 4. Donc la 97° est également un 4. La 100° est donc un 5.
3. La période est 074, formée de 3 chiffres. On remarque que la 2°, la 8°, la 11°… est un 0. Donc, la 998° est également un 0. Donc la 1000° est un 0.
4. Posons la division :

$$\begin{array}{ccccccc|l}
1 & & & & & & & 97 \\ \cline{8-8}
1 & \mathbf{0} & & & & & & 0,\ 0\ 1\ 0\ 3\ 0\ 9\ldots.. \\
1 & 0 & \mathbf{0} & & & & & \\
 & & 3 & \mathbf{0} & & & & \\
 & & 3 & 0 & \mathbf{0} & & & \\
 & & & & 9 & \mathbf{0} & & \\
 & & & & 9 & 0 & \mathbf{0} & \\
 & & & & & & \ldots &
\end{array}$$

On a :

Rang de la décimale	Décimale	Opération correspondante
1	0	97 × 0 + 10 = 1**0**
2	1	97 × 1 + 3 = 10**0**
3	0	97 × 0 + 30 = 3**0**
4	3	97 × 3 + 9 = 30**0**
5	0	97 × 0 + 90 = 9**0**
6	9	97 × 6 + 27 = 90**0**
…	…	…
96	?	97 × ?? + 1 = 10 × nombre

Pourquoi « 1 » : car c'est le reste suivant qui génèrera le « 1 » de la période suivante. Donc on cherche un entier ?? compris entre 0 et 9, tel que 97 × ?? + 1 soit un multiple de 10. On essaie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Seul « 7 » convient. La 96° décimale est donc un 7

Exercice 2 - Code secret

Premier indice

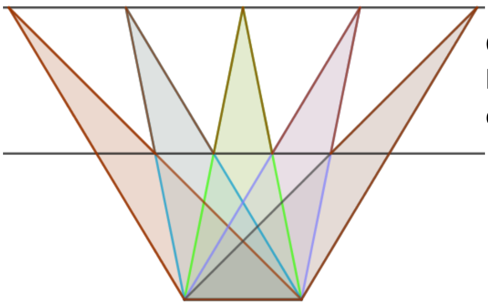
Ce code est donc l'un des nombres entiers compris entre 0000 et 2018. Il y a donc 2019 codes possibles.

Second indice

indice du double	2010	1809	1608	1407	1206	1005	0804	0603	0402	0201	0000
indice parité	~~3~~	18	~~15~~	12	~~9~~	6	12	~~9~~	6	~~3~~	0
indice non mult de 9				12		6	12		6		0

On en déduit que plusieurs codes sont possibles : 1407 ; 1005 ; 0804 ; 0402 ; 0000

Exercice 3 - La couronne

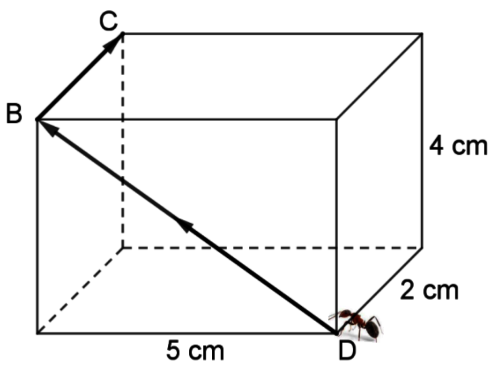
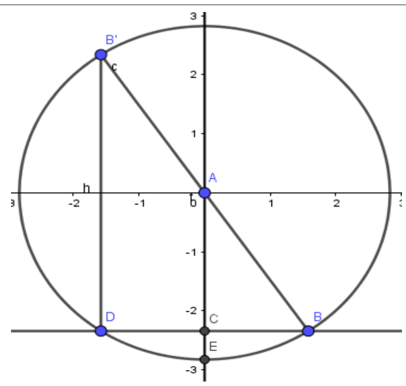


On calcule l'aire totale comme si la couronne « était pleine » et l'on enlève les 4 aires des triangles vides entre les pointes, qui ont tous pour base 4 (à démontrer) et pour hauteur 5

$$\left[\frac{(4\times 4)+4}{2}\right]\times 10-4\times\frac{4\times 5}{2}=100-40=60 \quad \text{cm}^2$$

Exercice 4 - Les fourmis

1.

	
En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient : $\sqrt{41}+2$ cm	Par une section, on applique le théorème de Thalès e notant R le rayon de la sphère : $\frac{R}{2R}=\frac{R-0{,}5}{3}$ soit 3R=2R²-R soit R=2 On en déduit la longueur du trajet : $1+\pi\times 2=2\pi+1$ cm

En utilisant des valeurs approchées sous forme décimale on conclut que la fourmi 2 effectue le chemin le plus court

2.

a. Le circuit parcouru par la fourmi 2 est plus long, donc elle arrivera plus tard que la fourmi 1.

b. La face latérale sur laquelle circule la fourmi 2 est un rectangle, dont cette fourmi parcourt. On en calcule la longueur en utilisant le théorème de Pythagore : $\sqrt{4\pi^2+25}$.

On cherche au bout de combien de tours *m* la fourmi 1 retrouve au même moment la fourmi 2 qui elle a effectué exactement *n* tours. Il faut donc que $4\pi \times n = m \times \sqrt{4\pi^2+25}$ soit $\frac{n}{m} = \frac{\sqrt{4\pi^2+25}}{4\pi}$. Il faut donc que $\frac{\sqrt{4\pi^2+25}}{4\pi}$ soit une fraction.

Supposons que ce soit le cas.

Alors son carré $\frac{4\pi^2+25}{16\pi^2}$ est une fraction, donc $\frac{1}{4}+\frac{25}{16\pi^2}$ aussi, donc $\frac{25}{16\pi^2}$ également donc $\frac{16\pi^2}{25}$ aussi et donc π^2 est une fraction.