

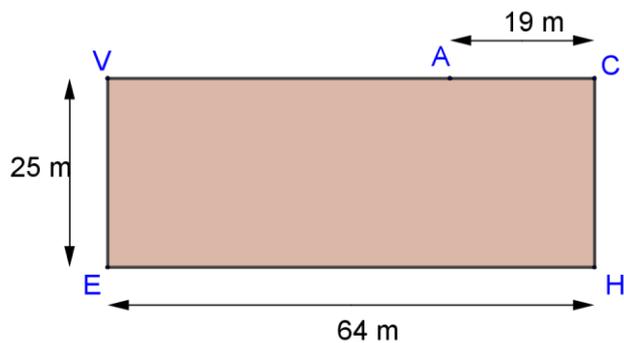
Exercices d'entraînements pour les olympiades 2013 2014

Voici une série d'exercices sélectionnés, dans l'esprit des olympiades 4^e, qui permettront en complément des sujets des années précédentes, d'entraîner vos élèves.

Exercice 1 : Le champ rectangulaire

M. Agoche, agriculteur, donne un champ rectangulaire en partage à ses deux enfants, Yvon et Elvire, qui veulent s'essayer à l'élevage.

Yvon et Elvire tiennent à se partager le champ en deux parties de surface égale, à l'aide d'une clôture rectiligne.



1. Quelle est la plus petite longueur de clôture qu'ils peuvent utiliser ?
2. Quelle est la plus grande longueur de clôture qu'ils peuvent utiliser ?
3. Le champ n'est accessible que par un unique chemin qui aboutit au point A, situé à 19 mètres du point C, sur le segment [CV].

Chacun des deux enfants voulant pouvoir sortir grâce à ce chemin, le partage du champ en deux parties d'aires égales doit se faire par une clôture rectiligne partant du point A.

Calculer la longueur de la clôture dont ils ont besoin afin de réaliser ce partage.

Exercice 2 : La Joconde

Dans la même position depuis 1507, *La Joconde* ou *Portrait de Mona Lisa* a des crampes et souhaiterait étirer ses bras.

Les dimensions du cadre : 77 cm de haut sur 53 cm de large, ne le lui permettent pas.

Quelle doit être la surface du tableau pour que La Joconde puisse étendre ses bras horizontalement, sachant qu'elle a une envergure de 1,50 m ?



Exercice 3 Carthage

LA FONDATION DE CARTHAGE.

Selon la légende, la ville antique de Carthage, grande rivale de Rome pendant longtemps, fut créée par la reine Didon d'une étrange façon.

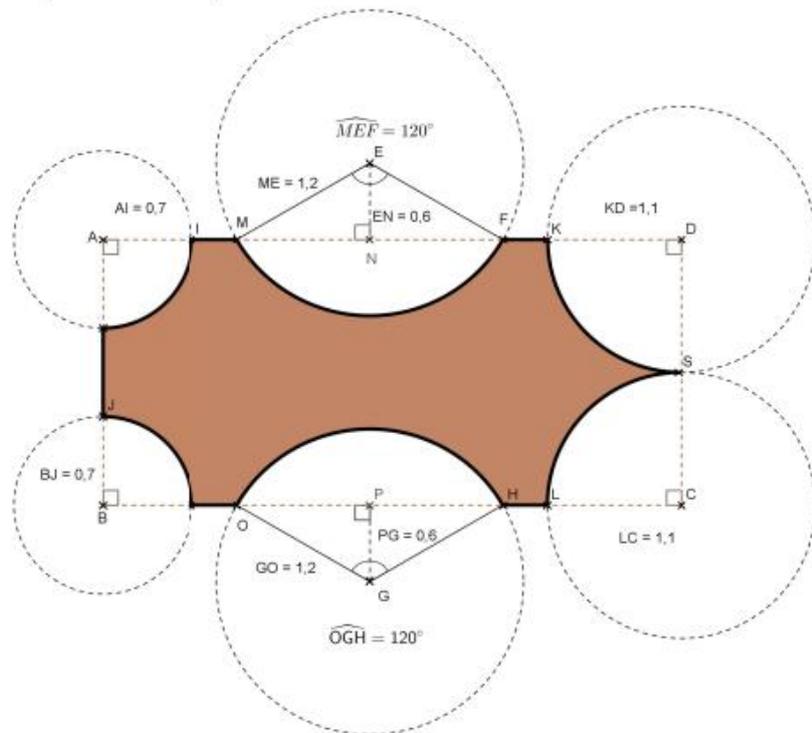
Le cruel roi Hiarbas offrit à Didon un terrain d'une taille fort modeste :
« un territoire que pourrait recouvrir une peau de boeuf »



1) Avec la peau de bœuf suivante, (qui correspond à la surface colorée) de quelle surface la pauvre Didon disposait-elle-elle pour s'installer ?

Sur la figure ci-contre, toutes les longueurs sont données et mètres.

ABCD est un rectangle de longueur $AD = 4,5$ m et de largeur $AB = 2,2$ m.



2) Heureusement pour Didon, la langue grecque, utilisée par le roi Hiarbas était imprécise (en terme géométriques tout du moins).

En effet, le même verbe signifiait « recouvrir » et « entourer ».

Didon profita de cette imprécision. Elle découpa la peau de bœuf en fines lanières (que nous considérerons rectangulaires), et délimita le contour d'un territoire suffisamment grand pour y construire une citadelle.

a) En découpant des bandes rectangulaires de 2 mm de large, de quelle longueur totale Didon disposa-t-elle pour entourer son territoire ?

b) En disposant ces lanières en forme de cercle, quelle surface (en m^2) Didon est-elle parvenue à s'octroyer ?

Exercice 4

Le triangle pythagoricien

Notions abordées :

- Les triplets pythagoriciens
- La réciproque du théorème de Pythagore
- L'aire et la hauteur d'un triangle
- Les diviseurs
- Les diviseurs communs
- La proportionnalité ou réduction/agrandissement

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Trois nombres entiers a , b et c forment un triplet pythagoricien s'ils vérifient la relation $a^2 + b^2 = c^2$.

Partie 1.

- Expliquer pourquoi les nombres entiers 3, 4 et 5 forment un triplet pythagoricien.
- Déterminer le nombre c pour que les nombres entiers 8, 15 et c forment un triplet pythagoricien.

Partie 2.

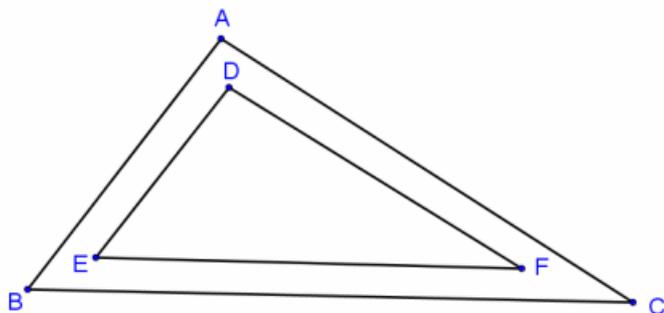
Un champ triangulaire ABC est tel que $BC = 623$ m, $AB = 273$ m, et $AC = 560$ m.

a) Montrer que les nombres entiers 273, 560 et 623 forment un triplet pythagoricien et que le triangle ABC est rectangle en A.

b) On veut fabriquer un chemin, le plus court possible, reliant le sommet A au côté [BC] et large de 2 m. Quelle est l'aire du champ qui sera disponible pour l'herbage ?

c) On veut planter des arbres le long des trois côtés du champ, avec un arbre à chaque sommet. De plus, la distance entre deux arbres est partout la même. Calculer la plus grande distance possible entre deux arbres et le nombre total d'arbres à planter.

d) On veut entourer le champ d'un grillage EDF, ayant la même distance aux côtés du champ et de telle sorte que $ED = 195$ m (voir figure ci-dessous). Déterminer la longueur totale de grillage nécessaire pour entourer le champ suivant EDF.



Exercice 5 L'équipement des ménages

On réalise une étude sur l'équipement des 140 foyers d'un village.

À la question « possédez-vous un téléviseur ? », 88 répondent oui.

À la question « possédez-vous un ordinateur ? », 66 répondent oui.

À la question « possédez-vous un téléphone portable ? », 88 répondent oui.

À la question « possédez-vous un téléviseur et un ordinateur ? », 15 répondent oui.

À la question « possédez-vous un téléviseur et un téléphone ? », 17 répondent oui.

À la question « possédez-vous un ordinateur et un téléphone ? », 24 répondent oui.

À la question « possédez-vous les trois produits ? », 33 répondent oui.

Dans combien de foyers y a-t-il un téléviseur, mais ni ordinateur ni téléphone portable ?

Exercice 6 Les macarons

Un pâtissier a fait un kilogramme de macarons de plus de 10g chacun. Il désire les ranger dans une boîte; mais il s'aperçoit que s'il veut les mettre par rangée de deux, de trois, de quatre, de cinq ou de six, il lui en reste un à chaque fois.

Combien a-t-il fait de macarons ?



Exercice 7 : Vidange

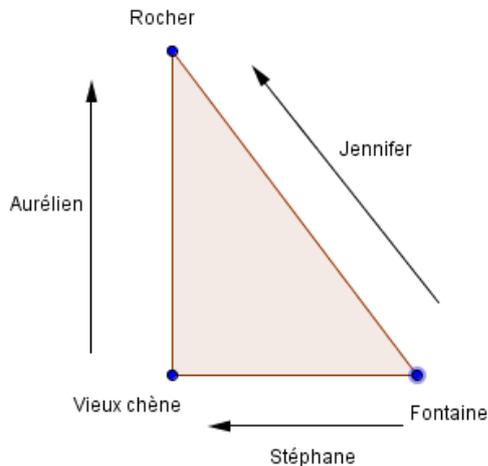
Un bassin de 30 m^3 rempli d'eau est muni de trois vannes de débits différents, n'ayant que deux positions : ouvert ou fermé.

1. La vanne V1 a un débit de 50 litres par minute. Combien de temps faut-il pour vider le bassin si on n'utilise que la vanne V1 ?
2. Avec la vanne V2 seule, le bassin se vide deux fois plus vite qu'avec la vanne V1. Combien de temps faut-il pour vider le bassin si on utilise simultanément les vannes V1 et V2 ?
3. Avec la vanne V3 seule, le bassin se vide trois fois moins vite qu'avec la vanne V2. Combien de temps faut-il pour vider le bassin si on utilise simultanément les vannes V1, V2 et V3 ?
4. On souhaite ajouter une quatrième vanne pour que le bassin soit vidé en seulement 2 heures. Quel doit être le débit de cette nouvelle vanne ? On donnera une réponse par comparaison avec le débit de l'une des vannes existantes.

Exercice 8 : Les randonneurs

Trois randonneurs marchent sur le circuit pédestre représenté ci-dessous, chacun allant toujours dans le même sens, comme indiqué sur la figure, et à vitesse constante. Stéphane et Jennifer marchent à la même vitesse, tandis qu'Aurélien marche deux fois plus vite. Stéphane et Jennifer sont partis à 10h de la fontaine, et Aurélien à 11h du vieux chêne, juste au moment où Stéphane y passait.

A quelle heure Jennifer et Aurélien se rencontreront-elles pour la première fois ?



Exercice 9 : L'ours polaire

Un ours polaire portant des patins à glace a découpé dans un lac gelé un grand trou parfaitement rond dans lequel il a plongé afin d'aller pêcher.

Il lui a fallu 36 secondes à une vitesse de 15 km par heure pour faire le trou.
Calculer la surface du trou (l'aire du disque)



Exercice 10 Les lettres

On sait que :

$$2A + B = 2C + A = 2B + 2C = 3B + A = 10$$

A partir de ces égalités, trouvez la valeur de chaque lettre...

Exercice 11 Compétition

Une compétition comporte quatre épreuves, toutes obligatoires. Pour chacune d'entre elles, un candidat peut se voir attribuer 0, 1, 2, 3 ou 4 points.

La compétition terminée, un statisticien constate que, pour toute paire de candidats, les scores ont été identiques dans au plus une des quatre épreuves.

Combien y avait-il – au maximum – de participants ?

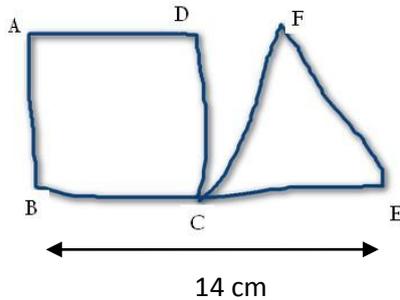
Exercice 12 : Les périmètres

ABCD est un carré et CEF est un triangle équilatéral. Les points B, C et E sont alignés.

On sait que $BE = 14$ cm.

On sait que le carré et le triangle ont le même périmètre.

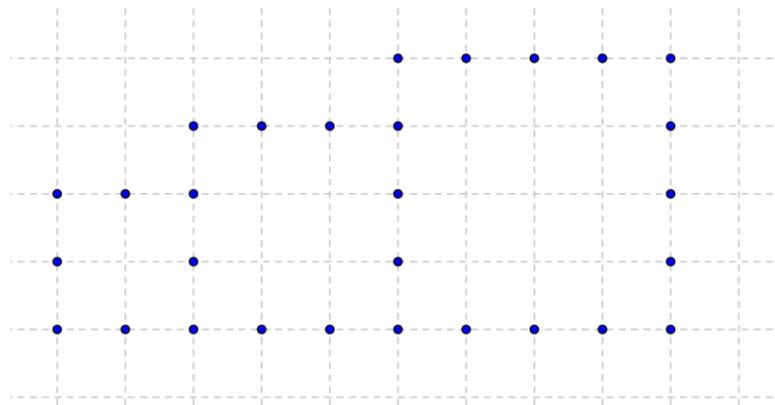
Un dessin a été réalisé à main levée :



Combien mesure le côté du triangle ?

Réaliser le dessin en vraie grandeur

Exercice 13 : Combien de points ?



On réalise tout d'abord un carré de 3 points de côté comme sur la figure ci-dessus. Puis on y ajoute un carré de 4 points de côté, puis de 5 points de côté et ainsi de suite.

1/ De combien de points aura-t-on besoin si on souhaite poursuivre la figure jusqu'au carré de 6 points de côté ? De 7 points de côté ?

2/ De combien de points aura-t-on besoin si on souhaite poursuivre la figure jusqu'au carré de 20 points de côté ?

Exercice 14 : Une suite

On forme une suite de nombres entiers en suivant la règle suivante : pour chaque groupe de quatre nombres consécutifs, a, b, c, d , le quatrième, d , est la différence entre le troisième, c , et le plus grand des deux premiers, ce qui peut se noter : $d = c - \text{Max}(a, b)$.

Vérifier que ce procédé de construction est respecté dans ce qui suit :

$$0, 1, 2, 1, -1, -3, -4, -3, 3, 3, 0, \dots$$

Quel est le centième terme de la suite de nombres commencée ci-dessus ?

Exercice 15 : La piscine

Une piscine peut être remplie d'eau au moyen de deux pompes. La première remplit la piscine en trois heures exactement, la seconde la remplit en quatre heures exactement.

L'eau de la piscine peut être vidée au moyen d'un circuit d'évacuation. Cette opération demande six heures exactement.

La piscine ayant été vidée, un employé commence le remplissage en faisant fonctionner simultanément les deux pompes. Au bout d'une heure, il commet l'erreur d'ouvrir le circuit d'évacuation.

Au bout de combien de temps la piscine sera-t-elle pleine ?