MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Exercices Académiques, Grenoble

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

L'épreuve se déroule par groupes de 1 à 4 élèves, chaque groupe rédige une seule copie, sans limitation du nombre de pages.

Il est conseillé aux groupes de candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition, ils pourront être restitués aux candidats le lendemain.

Chaque groupe de candidats traite **deux exercices.**

- Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
- Les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Les Q-suites

Dans les années 70, l'écrivain Raymond Queneau – auteur entre autres de « Zazie dans le métro » et de « Cent mille milliards de poèmes » - s'est intéressé aux propriétés de certaines suites numériques. On en propose ici une étude succincte.

On appelle suite une fonction u définie sur $\mathbb{N}$. On notera $u_0 = u(0), u_1 = u(1)$ …

Soient deux entiers naturels a et b. On appelle Q-suite de base (a, b) la suite u définie ainsi :

- On pose $u_0 = a$ et $u_1 = b$.
- Le terme u_2 est le plus petit entier strictement supérieur à u_1 qui est différent de $u_0 + u_1$.
- Le terme u_3 est le plus petit entier strictement supérieur à u_2 qui est différent de $u_0 + u_1$, de $u_1 + u_2$ et de $u_0 + u_2$.
- On recommence ainsi à chaque étape : pour tout $n \geq 1$, u_{n+1} est le plus petit entier strictement supérieur à u_n qui n'est pas égal à la somme de deux termes choisis (une seule fois) parmi les précédents u_0 ; u_1 ; u_2 ; … ; u_n.

Par exemple, la Q-suite de base $(1,6)$ commence par $(1, 6, 8, 10, 12)$. La Q-suite de base $(2,5)$ commence par $(2, 5, 6, 9, 10, 13)$.

Partie A. Etude mathématique

1. Déterminer les six premiers éléments de la Q-suite de base $(2,6)$.
2. La suite des entiers naturels non nuls : $1, 2, 3, 4$… est-elle une Q-suite ? Même question pour la suite des nombres pairs non nuls $2, 4, 6, 8$…
3. On note, dans cette question, u la Q-suite de base $(1, 3)$.
   a. Donner les six premiers termes de u.
   b. Soit un entier $k_0 \geq 2$ fixé. On suppose qu'on a réussi à prouver que les k_0 premiers termes de u sont :
   $$(1, 3, 5, \dots, 2k_0 - 1).$$
   Déterminer le terme suivant de la suite u en fonction de k_0. On expliquera le raisonnement avec soin.

4. On note, dans cette question, u la Q-suite de base $(1, 2)$. On a donc $u_0 = 1, u_1 = 2$. Soit un entier $k_0 \geq 2$ fixé. On suppose qu'on a réussi à prouver que pour tous les entiers i entre 2 et k_0, $u_i = 3i - 2$. Montrer que cette expression est encore valable pour le rang suivant (il s'agit donc de montrer que le terme suivant u_{k_0+1} peut s'écrire $3(k_0 + 1) - 1$ c'est-à-dire $3k_0 + 1$).

5. Soit b tel que $b \geq 1$ et u la Q-suite de base $(1, b)$.
   a. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
   $$2 + u_n \leq u_{n+1} \leq 2u_n.$$
   b. En déduire, pour $n \geq 2$ un encadrement de u_n en fonction de n et b.

Partie B. Approche algorithmique

Aide Python
La liste de nombres $(2,6,4,3,8)$ se définit ainsi sous Python : l=[2,6,4,3,8].
Dans ce cas, on accède aux éléments de la liste en notant l'indice entre crochets (l'indice démarre à 0) : l[0]=2, l[1]=6, l[2]=4… ;
len(l) renvoie le nombre d'éléments de la liste l (5 dans l'exemple).
Pour ajouter le nombre 15 à la fin de la liste l, il suffit d'écrire la commande l.append(15).
Ainsi la liste l de l'exemple devient [2,6,4,3,8,15]

1. La fonction Est_somme ci-dessous prend un nombre et une liste en arguments, et renvoie True si le nombre peut s'écrire comme la somme de deux termes d'indices différents de la liste, ou False sinon.
   Recopier sur votre copie, en la complétant, l'instruction de la ligne 4 commençant par « if ».

```
def Est_somme(nombre, liste):
    for j in range(len(liste)):
        for i in range(j):
            if ......................
                return True
    return False
```

2. Ecrire une fonction Terme_suivant qui prend en argument une liste non vide, et qui renvoie le plus petit entier strictement supérieur au dernier élément de la liste et qui n'est pas la somme de deux termes d'indices différents de la liste.

3. Ecrire une fonction Complete_suite qui prend en arguments un entier n, supérieur ou égal à 2 et deux entiers a et b, et qui renvoie la liste des n premiers termes de la Q-suite de base (a, b).

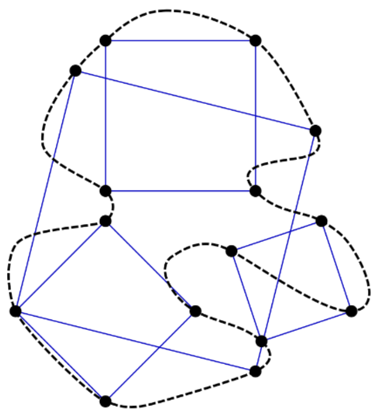
Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Parallélogrammes inscrits sur une courbe.

La conjecture de Toeplitz affirme que toute courbe fermée simple admet (au moins) un carré inscrit (un carré inscrit dans une courbe est un carré dont les sommets appartiennent à la courbe).

C'est un problème que les mathématiciens n'ont toujours pas résolu dans le cas général !

On s'intéresse ici à un problème lié : la courbe d'une fonction polynomiale (dans un repère orthogonal) possède-t-elle au moins un parallélogramme inscrit ? (Un parallélogramme est inscrit sur une courbe si ses quatre sommets sont placés sur la courbe).



Source : Wikipedia

On considère dans toute la suite le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A. Une infinité de parallélogrammes inscrits ?

1. Un exemple : la fonction cube.
    a. Tracer sur votre copie la courbe représentative Γ de la fonction f définie par $f(x) = x^3$. On pourra se limiter à l'intervalle $[-2\ ; 2]$.
    b. Tracer de deux couleurs différentes deux parallélogrammes inscrits sur la courbe Γ.
    c. Quel semble être le centre de ces parallélogrammes ? On ne demande pas de justification dans cette question.
    d. On considère les points $B(-2\ ;\ -8)$ et $C(-1\ ;\ -1)$. Déterminer les coordonnées de deux points D et E tels que $BCDE$ soit un parallélogramme inscrit sur la courbe Γ.

2. Rappel : *on dit qu'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ est impaire si pour tout réel x, $g(-x) = -g(x)$.*
Démontrer que si la fonction polynomiale g est impaire alors la courbe d'équation $y = g(x)$ possède au moins un parallélogramme inscrit (éventuellement aplati). Possède-t-elle une infinité de polynômes inscrits ?

Partie B. Aucun parallélogramme inscrit ?

Dans cette partie, on pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : *quels que soient les réels α et β, l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ possède au plus deux solutions.*

On considère un point A de coordonnées (a, b) et la courbe Γ d'équation $y = x^2$.

1. Dans cette question, on suppose que A a pour coordonnées $(1, -2)$.
Justifier que Γ ne possède pas de parallélogramme inscrit dont le centre est A.

2. Dans cette question, on suppose que A a pour coordonnées $(2, 5)$.
    a. Démontrer que le point $N(1, 1)$ est sur Γ et que son symétrique par rapport au point A est lui aussi sur Γ.
    b. Déterminer les points $M(x, y)$ qui sont sur Γ et qui sont tels que leur symétrique par rapport à A soit lui aussi sur Γ.
    c. En déduire qu'il n'existe pas de parallélogramme inscrit sur la courbe Γ dont le centre est A.
3. Dans cette question, $A(a, b)$ est un point quelconque.
    a. Démontrer que si $M(x, y)$ est sur Γ et que son symétrique par rapport à A est lui aussi sur Γ alors $x^2 - 2ax + 2a^2 - b = 0$.
    b. En déduire qu'il n'existe pas de parallélogramme inscrit sur la courbe Γ.

Partie C. Le problème inverse avec une fonction polynomiale du quatrième degré.

On s'intéresse aux points $M(-2, 1), N(-1, 0), P(2, -1)$ et $Q(1, 0)$.

1. Vérifier que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.
2. Déterminer une fonction polynomiale du quatrième degré f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe Γ passe par les quatre points M, N, P et Q. On pourra chercher quatre réels b, c, d et e tels que pour tout réel $x, f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
Indication : selon la méthode utilisée, il pourra être utile de poser à un moment du raisonnement : $V = 4c + e, X = c + e, Y = b + d, Z = 4b + d$.

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Plus il y a de trous … plus il y a de carrés !

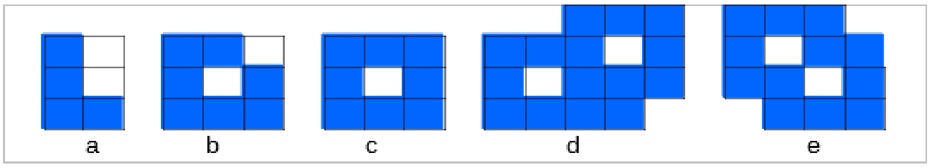
Très largement inspiré par l'article de Jean-Paul Delahaye, paru dans le numéro 501 de la revue « Pour la Science ».

Des formes trouées avec des carrés.

Une « forme » désigne un assemblage de pièces carrées de même taille collées côté contre côté.

Un trou est un assemblage de carrés non colorés complètement entourés de carrés colorés, y compris en diagonale.

Des trous distincts ne doivent pas se toucher.



Par exemple, dans la figure ci-dessus, les formes a et b n'ont pas de trou, les formes c et e ont un seul trou, la figure d possède deux trous.

La question étudiée dans cet exercice est la suivante : **pour un entier *n* donné, combien faut-il au minimum de carrés colorés pour construire une forme présentant *n* trous ?**

Dans la suite, nous noterons $f(n)$ ce nombre minimal où n désigne un entier naturel non nul.

Partie A. Quelques petites valeurs de *n*.

1. Déterminer $f(1)$ et $f(2)$.
2. Trouver trois formes différentes (non superposables) montrant que 18 carrés colorés suffisent pour entourer trois trous. Que peut-on en déduire concernant $f(3)$?
3.
   a. Proposer un majorant de $f(n)$ en fonction de n.

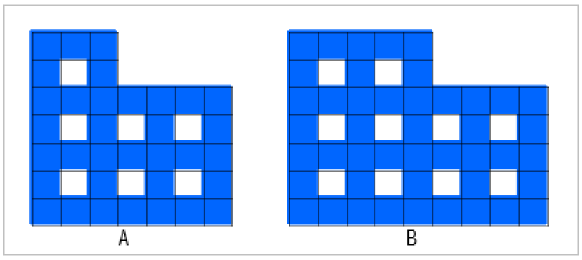
   b. Trouver une forme à 21 carrés colorés et quatre trous. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que $f(5) \leq 26$. Illustrer ce résultat.

Partie B. Etude d'un cas particulier : les formes standard.

Nous appellerons rangée pleine de taille l une forme sur une seule ligne, composée de $2l + 1$ carrés colorés ; nous appellerons rangée alternée de taille l une forme sur une seule ligne comprenant $2l + 1$ carrés, commençant par un carré coloré, finissant par un carré coloré et alternant carré coloré et carré non coloré.

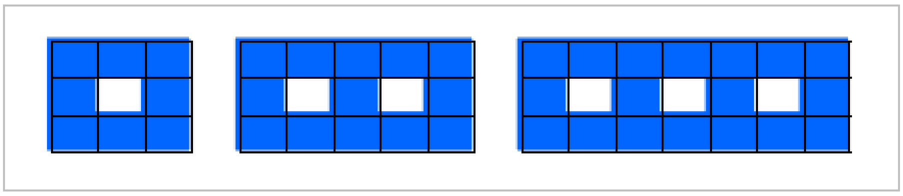
Nous appellerons forme standard de taille $h \times l$ une forme obtenue en partant d'une rangée pleine d'une taille l, puis en « posant » une rangée alternée de même taille et ainsi de suite jusqu'à la rangée $2h - 1$ où on pose une rangée alternée de taille inférieure ou égale à l puis à la dernière rangée, une rangée pleine de même taille que l'avant dernière rangée.

Dans l'exemple ci-dessous, la forme A est une forme standard de taille 3×3 et la forme B est une forme standard de taille 4×3.



Nous noterons $g(n)$ le nombre minimal de carrés colorés permettant de construire une forme standard présentant n trous.

1. On considère un entier naturel non nul n. Comparer $f(n)$ et $g(n)$.
2. En considérant des formes standard particulières (du type de la figure ci-dessous), proposer un majorant de $g(n)$ en fonction de n.



3. Donner un exemple de forme standard pour laquelle il est possible de créer un nouveau trou en ajoutant trois carrés colorés.
4. Trouver une expression dépendant de n qui minore $g(n)$.
5. **Une tentative de minimisation du nombre de carrés pour les formes standard.**
   En construisant pas à pas certaines formes standard, on constate qu'il faut trois carrés colorés supplémentaires pour entourer chaque nouveau carré non coloré pour former un trou, sauf pour certaines valeurs de n pour lesquelles 5 nouveaux carrés colorés sont nécessaires.

   Nous considérons dans cette question une forme standard de taille $l \times h$. On note n le nombre de trou de cette forme standard.

   a. Déterminer un encadrement de n en fonction de l et h.

   b. Quel est le nombre total de carrés colorés utilisés dans cette forme standard (c'est-à-dire le nombre de carrés colorés utilisés pour border les n trous organisés en h rangées de longueur l) ? On donnera le résultat en fonction de n, l et h.

Partie C. Deux cas particuliers

1. Pour $n = p^2$, p étant un entier naturel : démontrer que $f(n) \leq 3p^2 + 4p + 1$.
2. Pour $n = p(p+1)$, p étant un entier naturel : démontrer que $f(n) \leq 3p^2 + 7p + 3$
3. Déterminer alors un majorant de $f(64)$ et un majorant de $f(90)$.

Remarque : Il semble que les formes standard minimisent le nombre de carrés colorés nécessaires pour entourer n trous, mais ce résultat n'est qu'une conjecture.