OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION DE 2001

CLASSE DE PREMIÈRE **DURÉE : 4 heures**

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

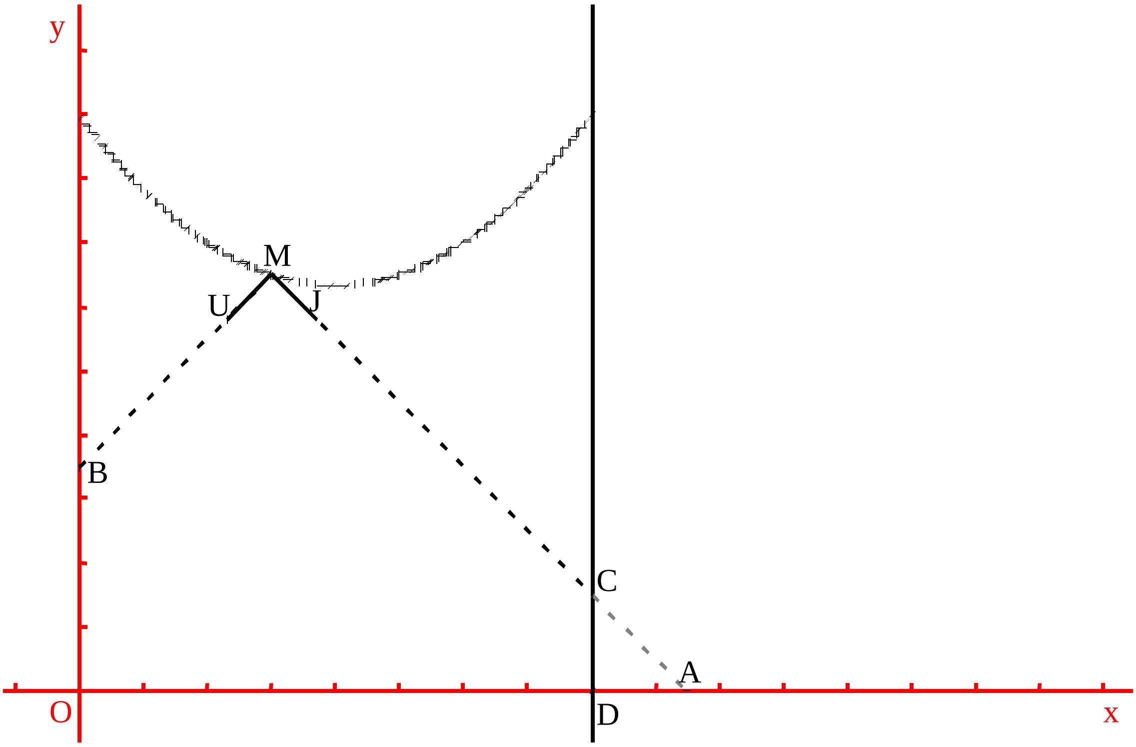
EXERCICE 1 :

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4.
Le dé est posé sur une table, face « 1 » contre cette table.
Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.
À l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme s de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le « 1 » initial.

1 - Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour s.
2 - La somme s peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

EXERCICE 2 :

Une lampe entourée d'un abat-jour est suspendue entre deux murs distants de 8 mètres à une rampe.
La situation est représentée par le schéma ci-dessous :

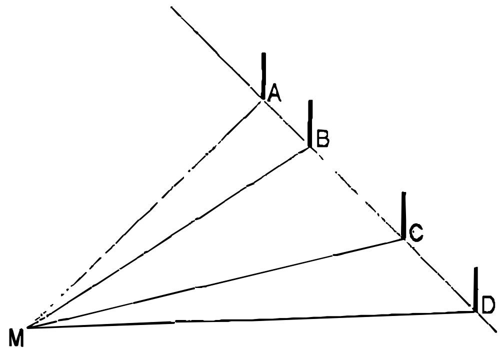


- Les murs ont pour équations $x = 0$, $x = 8$ et la rampe a pour équation $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + \frac{19}{3}$.
- L'abat-jour est symbolisé par un triangle rectangle isocèle UMJ de côtés 1 et $\sqrt{2}$.

1 - Vérifier que les bords de l'abat-jour ne touchent ni la rampe ni les murs lorsque $1 < x < 7$.
2 - Calculer l'aire du polygone éclairé OBMCD correspondant à $x = 3$.
3 - Trouver la position de la lampe sur la rampe qui donne un éclairage maximal.

EXERCICE 3 :

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantés en A, B, C et D dans cet ordre.
Ces poteaux délimitent trois buts de largeurs :
AB = 1, BC = 2, CD = d, où d est une longueur donnée.
Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMD}$ égaux.



EXERCICE 4 :

Dessinez un cube *C* (un dessin même approximatif en perspective suffira).
Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire tel que le milieu du segment [AB] soit le centre du cube.
Considérons un autre cube *C* ' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés.
Certaines arêtes de *C* rencontrent des arêtes de *C* '. Justifiez le fait que, en dehors de A et B, on obtient ainsi six points d'intersection entre une arête de *C* et une arête de *C* '.
Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.
V étant le volume de *C*, quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et *C* ' ?

Annexe de l'exercice 2, à rendre avec la copie