Problème I : Sommes de cubes

1. On cherche d'abord les cubes pairs inférieurs à 2 016 : ce sont ceux inférieurs ou égaux à $12^3 = 1\ 728$.
   Puisque par ailleurs $2^3+4^3+6^3+8^3+10^3 < 2016$, une décomposition possible de 2016 dans S_0 doit comporter 12^3. Elle ne peut également comporter ni 10^3 ni 8^3 (car $8^3+12^3 > 2016$).
   En tâtonnant un peu, on trouve alors finalement $\boxed{2016 = 12^3+6^3+4^3+2^3}$.

2. (a) Soit $x \geqslant 5$ un réel. Alors, puisque la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{2x-1} = 1 + \frac{2}{2x-1}$ est décroissante sur $[5, +\infty[$, on a :

$$\frac{2x+1}{2x-1} \leqslant \frac{11}{9}$$

   et, par croissance de la fonction cube,

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^3 \leqslant \left(\frac{11}{9}\right)^3 \leqslant 2$$

   puisque $9^3 = 729$ et $11^3 = 1\ 341 \leqslant 2 \times 729$. On en déduit donc bien :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 5,\ (2x+1)^3 \leqslant 2(2x-1)^3.}$$

   (b) On peut procéder par récurrence sur l'entier $p \geqslant k$.
   Initialisation Si $p = k$ alors l'inégalité à prouver est $(2k+1)^3 \leqslant (2k-1)^3 + (2k-1)^3$, ce qui est vrai d'après la question précédente (puisque $k \geqslant 5$ d'après l'énoncé).
   Hérédité Soit maintenant $p \geqslant k$ tel que le résultat soit vrai. Montrons que le résultat reste vrai au rang $p+1$.
   D'abord, d'après la question précédente, on a :

$$(2(p+1)+1)^3 \leqslant (2p+1)^3 + (2p+1)^3$$

   et donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$(2(p+1)+1)^3 \leqslant \left((2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3\right) + (2(p+1)-1)^3 = (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p+1}(2j-1)^3.$$

   D'après le principe de récurrence, on a donc bien :

$$\boxed{\text{pour tout entier } p \geqslant k,\ (2p+1)^3 \leqslant (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3.}$$

3. Notons, pour tout entier naturel k, $a_k = (288k+1)^3$: il s'agit d'un cube d'impair tel que $a_k \equiv 1[288]$.
   Les entiers $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant 288}$ définis par $s_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$ sont alors des éléments de S_1 tels que $s_i \equiv \sum_{j=1}^{i} 1[288]$ i.e. $s_i \equiv i[288]$ pour tout i dans $\{1, \cdots, 288\}$.
   Remarque. On a ici utilisé la compatibilité de la congruence avec la somme et le produit.

4. Considérons x un entier de l'intervalle $[m+u_1, 288n+u_1]$.
   Par division euclidienne de $x-u_1$ par 288, il existe un entier $i \in \{1, \cdots, 288\}$ tel que $x-u_1 \equiv i[288]$ soit encore $x-u_1 \equiv s_i[288]$. Il existe donc un entier j tel que $x-u_1 = s_i + 288j$.
   Puisque $x-u_1 \geqslant m \geqslant s_i$, on a d'abord $j \geqslant 0$. De même, puisque $288j = x-u_1-s_i < x-u_1 \leqslant 288n$, on a $j < n$ et donc $j \in \{0, \cdots, n-1\}$.
   Finalement, on a $\boxed{x = u_1 + 288j + s_i = u_{j+1} + s_i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant 288$ et $1 \leqslant j+1 \leqslant n$.
   Remarque. On a ici utilisé la transitivité de la congruence (si $x \equiv y[288]$ et $y \equiv z[288]$ alors $x \equiv z[288]$).

5. (a) Posons d'abord, pour x réel,

$$A(x) = (2x+10)^3 + (2x+8)^3 + (2x)^3 \quad \text{et} \quad B(x) = (2x+12)^3 + (2x+4)^3 + (2x+2)^3$$

   de telle sorte que (d'après l'énoncé) $B(x) - A(x) = 288$ pour tout x.
   Le nombre $u = A(1) + A(8)$ appartient à S_0 (car $2 \times 1 + 10 < 2 \times 8$) ainsi que $v := u + 288 = B(1) + A(8)$ (car $2 \times 1 + 12 < 2 \times 8$) et $u + 576 = v + 288 = B(1) + B(8)$ (car $2 \times 1 + 12 < 2 \times 8 + 2$).

(b) On peut également procéder par récurrence sur $n \geqslant 2$.
<u>Initialisation</u> Le cas $n = 2$ est un cas particulier de la question précédente.
<u>Hérédité</u> Supposons le résultat acquis à un certain rang n et prouvons-le au rang $n+1$.
Il existe d'abord (d'après l'hypothèse de récurrence) $u_1, \cdots, u_n$ dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.
Pour x entier tel que $2x$, $2x+2$, $2x+4$, $2x+8$, $2x+10$ et $2x+10$ n'apparaissent pas dans les décompositions de $u_1, \cdots, u_n$ en somme de cubes pairs (par exemple $x > \max(u_1, \cdots, u_n)$), les entiers $u_1 + A(x), \cdots, u_n + A(x)$ et $u_n + A(x) + 288 = u_n + B(x)$ sont en progression arithmétique de raison 288 et appartiennent à S_0.
D'après le principe de récurrence, on a donc bien l'existence, pour tout entier $n \geqslant 2$, de n éléments de S_0 en progression arithmétique de raison 288.

6. (a) Soit d'abord n un entier fixé tel que $288n \geqslant 2(2k-1)^3 + m$.
D'après la question précédente, il existe d'abord $u_1, \cdots, u_n$ des éléments de S_0 en progression arithmétique de raison 288.
D'après la question 4, tout entier x de l'intervalle $[m + u_1, 288n + u_1]$ s'écrit de plus sous la forme $x = s_i + u$ avec $1 \leqslant i \leqslant 288$ et $u \in S_0$.
L'entier $N = m + u_1$ convient : puisque $288n + u_1 \geqslant N + 2(2k-1)^3$ (par choix de n),

$$\boxed{\text{tout entier de } [N, N+2(2k-1)^3] \text{ s'écrit sous la forme } s_i + u \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant 288 \text{ et } u \in S_0.}$$

(b) — Montrons d'abord que, pour tout entier $p > k$, tout entier de $[N_{p-1}, N_p]$ appartient à S.
Soit n un entier de l'intervalle $[N_{p-1}, N_p] = [N_{p-1}, N_{p-1} + (2p-1)^3]$.
Par définition de N_{p-1}, l'entier $n' = n - \sum\limits_{j=k}^{p-1} (2j-1)^3$ appartient à l'intervalle $[N + (2k-1)^3, N + (2k-1)^3 + (2p-1)^3]$, lui-même inclus (car $p > k$) dans l'intervalle $[N, N + 2(2p-1)^3]$.
D'après la question précédente appliquée à p (qui est tel que $(2p+1)^3 > (2k+1)^3 > m$), n' s'écrit de la forme $s_i + u$ avec $1 \leqslant i \leqslant 288$ et $u \in S_0$.
Ainsi, l'entier n s'écrit sous la forme $\left(\sum\limits_{j=k}^{p-1} (2j-1)^3 + s_i \right) + u$ donc encore de la forme $s + u$ avec $u \in S_0$ et s un élément de S_1. Pour $k \leqslant j < p$, les entiers $(2j-1)^3$ sont en effets des cubes impairs distincts des $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant 288}$ puisque, pour tout entier j de $[k, p[$, $(2j-1)^3 \geqslant (2k-1)^3 > m$ et que m est le maximum de $s_1, \cdots, s_{288}$.
— On en déduit donc que <u>tout entier supérieur à N appartient à S.</u>
Si n est un entier supérieur à N alors, puisque $N_p \geqslant (2p-1)^3 \xrightarrow[p \to \infty]{} +\infty$, il existe un plus petit entier $p \geqslant k$ tel que $N_p \geqslant n$. Si $k = p$, la question précédente montre que $n \in S$. Sinon on a alors $N_{p-1} < n$ et donc $n \in [N_{p-1}, N_p]$ d'où encore $n \in S$ d'après ce qui précède.

Problème II : La rangée d'arbre qui cache la forêt

1. Montrons d'abord que la distance du point $A(a,b)$ à la demi-droite $\mathscr{D}_m$ [1] est $d = \dfrac{|b - ma|}{\sqrt{1+m^2}}$.
Notons $H(x,y)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}_m$. On a d'abord $d = AH$.
Puisque $H \in \mathscr{D}_m$, on a aussi $y = mx$. D'autre part, puisque (AH) est orthogonale à $\mathscr{D}_m$ de vecteur directeur $(1, m)$, on a également :

$$1(x-a) + m(y-b) = 0,$$

ce qui fournit (puisque $y = mx$) $(1+m^2)x = a + mb$. Notons qu'en particulier $x > 0$ et $y = mx > 0$.
On en déduit encore $x - a = \dfrac{m}{1+m^2}(b - ma)$ puis $y - b = mx - b = \dfrac{-1}{1+m^2}(b - ma)$ et donc, finalement :

$$\boxed{d = AH = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{|b-ma|}{\sqrt{1+m^2}}.}$$

Le résultat s'en déduit alors aisément :

$$\boxed{\text{la demi-droite } \mathscr{D}_m \text{ rencontre le cercle de centre } A(a,b) \text{ et de rayon } R \text{ si et seulement si la distance } d \text{ est telle que } d \leqslant R \text{ c'est-à-dire si et seulement si } |b - ma| \leqslant R\sqrt{1+m^2}.}$$

2. Supposons m irrationnel. D'après le résultat admis, il existe deux entiers naturels impairs a et b tels que $|b - ma| \leqslant R\sqrt{1+m^2}$.
Cela signifie exactement que la demi-droite $\mathscr{D}_m$ rencontre le cercle de centre (a,b) et de rayon R et donc <u>que $\mathscr{D}_m$ rencontre l'arbre centré en (a,b).</u>

1. définie comme la plus petite distance possible entre A et un point de $\mathscr{D}_m$

3. (a) Puisque $|b-ma| = 0 \leqslant R\sqrt{1+m^2}$, alors (d'après la question 1) la demi-droite $\mathscr{D}_m$ rencontre l'arbre centré en (a,b).

(b) Supposons a et b de parités différentes et que $\mathscr{D}_m$ rencontre l'arbre centré en (p,q) avec p, q deux entiers naturels impairs.

Alors, d'après la question 1, on a d'abord :

$$\left|p - \frac{b}{a}q\right| \leqslant R\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

c'est-à-dire encore :

$$\boxed{|pa - qb| \leqslant R\sqrt{a^2+b^2}.}$$

Par ailleurs, $qa - pb$ est un entier relatif impair. En effet, si par exemple a est pair et b est impair, alors qa est pair tandis que pb reste impair (puisque p et q sont impairs). Le cas où a est impair et b est pair est similaire.

En particulier, on a $|pa - qb| \geqslant 1$ et donc (d'après la conclusion précédente) :

$$\boxed{1 \leqslant R\sqrt{a^2+b^2}.}$$

4. Si toutes les demi-droites $\mathscr{D}_m$ avec $m > 0$ rencontrent un arbre, la demi-droite $\mathscr{D}_{2/1}$ rencontre en particulier un arbre.

D'après la question précédente, on a donc (puisque 2 et 1 sont de parités différentes) $1 \leqslant R\sqrt{5}$ i.e. $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqslant R}$.

5. Supposons que $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$ et montrons que toute demi-droite $\mathscr{D}_m$ rencontre un arbre planté en $(1,\alpha)$ ou $(\alpha,1)$ avec α un entier impair.

Il suffit d'abord de traiter le cas où $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (en effet, un arbre rencontrant $\mathscr{D}_m$ pour cette valeur de R conviendra aussi pour les valeurs supérieures de R).

Procédons par disjonction de cas sur $m > 0$ pour montrer (ce qui suffira d'après la question 1) qu'il existe un entier naturel impair α tel que $|\alpha - m| \leqslant \sqrt{\dfrac{1+m^2}{5}}$ ou $|\alpha m - 1| \leqslant \sqrt{\dfrac{1+m^2}{5}}$.

— Supposons d'abord que $m \geqslant 2$.
Considérons α un entier naturel impair le plus proche du réel m. Puisqu'il existe un entier naturel n tel que $n \leqslant m < n+1$ et que n ou $n+1$ est nécessairement impair (distinguer les cas selon la parité de n), on a nécessairement

$$|m-\alpha| \leqslant \max\left(|m-n|, |m-(n+1)|\right) \leqslant 1.$$

Cependant, d'après l'hypothèse $m \geqslant 2$, on a de plus

$$1 \leqslant \sqrt{\frac{1+m^2}{5}}$$

et donc, d'après les deux inégalités précédentes :

$$|\alpha - m| \leqslant \sqrt{\frac{1+m^2}{5}}.$$

— Supposons ensuite que $m \leqslant 1/2$.
En appliquant le cas précédent à $m' = 1/m \geqslant 2$, il existe un entier naturel impair α tel que :

$$|\alpha - m'| \leqslant \sqrt{\frac{1+m'^2}{5}}$$

soit encore (en multipliant par $m > 0$)

$$|\alpha m - 1| \leqslant \sqrt{\frac{1+m^2}{5}}.$$

— Montrons finalement que $\alpha = 1$ convient dans le cas où $m \in]1/2, 2[$.
Il s'agit de prouver que $|m-1| \leqslant \sqrt{\frac{1+m^2}{5}}$ ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 5(m-1)^2 &\leqslant 1+m^2, \\ 2m^2 - 5m + 2 &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Or les racines du polynôme $2X^2 - 5X + 2$ sont 2 et $1/2$ et donc, puisque $m \in]1/2, 2[$, le trinôme $2m^2 - 5m + 2$ est négatif.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, on a donc bien montré que la demi-droite } \mathscr{D}_m \text{ rencontre un arbre planté en } (\alpha, 1) \text{ ou } (1, \alpha) \text{ avec } \alpha \text{ un entier naturel impair.}}$$

6. Raisonnons par contraposée. Si l'observateur ne voit pas à travers la forêt alors toutes les demi-droites $\mathscr{D}_m$ avec $m > 0$ rencontrent un arbre et donc, d'après la question 4, $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$. Cependant, d'après la question précédente, l'observateur ne voit pas alors à travers la première rangée.
   Ainsi,
   $$\boxed{\text{si l'observateur voit à travers la première rangée, alors il voit à travers la forêt.}}$$

Problème III : Allons dans $\mathbb{C}$

1. (a) On a $\underline{j^3 = e^{2i\pi} = 1}$ et, en reconnaissant une somme de termes en progression géométrique de raison $j \neq 1$, on a :
   $$\boxed{1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0.}$$
   (b) <u>Il s'agit d'un triangle équilatéral direct de centre O</u> car :
   $$\frac{j - 0}{1 - 0} = \frac{j^2 - 0}{j - 0} = \frac{1 - 0}{j^2 - 0} = e^{i2\pi/3}.$$
   Remarque. On peut aussi constater que $\dfrac{j^2 - j}{1 - j} = -j = e^{i\pi/3}$.
   (c) Le sens réciproque est simple : si $a = b = c$ alors $a + bj + cj^2 = a(1 + j + j^2) = 0$ d'après la question 1.(a). Montrons maintenant le sens direct : on considère pour cela a, b, c des réels tels que $a + bj + cj^2 = 0$ et on montre que nécessairement $a = b = c$. Puisque $a + bj + cj^2 = 0$ et que (selon 1.(a)) $1 + j + j^2 = 0$, on a d'abord :
   $$(a - c) + (b - c)j = 0.$$
   De plus, si jamais $b - c \neq 0$, on aurait $j = -\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde (car $\mathrm{Im}(j) = \sin(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$). On a donc nécessairement $b - c = 0$ i.e. $b = c$ et alors, d'après la relation précédente, $a - c = 0$ et donc finalement $a = b = c$.
   Ainsi,
   $$\boxed{\text{si } a, b, c \text{ sont des nombres réels, } a + bj + cj^2 \text{ est nul si et seulement si } a = b = c.}$$

2. On a d'abord (puisque $j^3 = 1$) :
   $$j^1 = j \quad j^2 = j^2 \quad j^3 = 1 \quad j^4 = j^3 \times j = j \quad j^5 = j^3 \times j^2 = j^2 \quad \text{et} \quad j^6 = \left(j^3\right)^2 = 1$$
   ce qui montre que <u>$Z = j^F$ est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$</u>.
   De plus,
   $$\boxed{\begin{aligned} &P(Z = 1) = P(F \in \{3, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ &P(Z = j) = P(F \in \{1, 4\}) = \frac{1}{3}, \\ &P(Z = j^2) = P(F \in \{2, 5\}) = \frac{1}{3}. \end{aligned}}$$

3. (a) Puisque les Z_k sont à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$, les entiers k de $[1, n]$ sont :
   — soit tels que $Z_k = 1$ (il y en a U_n de ce type),
   — soit tels que $Z_k = j$ (il y en a V_n de ce type),
   — soit tels que $Z_k = j^2$ (il y en a W_n de ce type).
   En dénombrant ces éléments, on a donc :
   $$\boxed{n = U_n + V_n + W_n.}$$
   (b) Dans la somme S_n, on peut regrouper les termes Z_k selon leurs valeurs possibles, 1, j ou j^2. Puisqu'il y a U_n termes valant 1, V_n termes valant j et W_n termes valant j^2, on a :
   $$\boxed{S_n = Z_1 + \cdots + Z_n = U_n \times 1 + V_n \times j + W_n \times j^2}$$
   (l'ordre des termes n'ayant pas d'importance dans une somme).
   (c) C'est alors immédiat d'après la question 1.(c).

(d) Montrons d'abord, par contraposée, que si n n'est pas multiple de 3 alors l'événement $S_n = 0$ est impossible. Si $S_n = 0$ alors, d'après la question précédente, on a $U_n = V_n + W_n$ et donc, d'après la question (a), $n = 3U_n$ est multiple de 3.

On a donc bien prouvé que $[S_n = 0] = \varnothing$ si n n'est pas multiple de 3 et donc $\boxed{p_n = P(S_n = 0) = 0}$.

4. (a) La variable aléatoire U_n correspond au nombre de succès des événements $[Z_k = 1]$ pour k entier de $[1, n]$. Puisque les Z_k ont même loi et sont indépendantes (car les F_k possèdent ces mêmes propriétés), il s'agit d'une répétition indépendante de n expériences de Bernoulli de même probabilité $P(Z_k = 1) = 1/3$ et donc U_n suit une loi binomiale de paramètres $n, 1/3$.

(b) Par définition d'une loi binomiale, on a alors :

$$\boxed{P(U_n = m) = \binom{n}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^m \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-m} = \binom{3m}{m}\frac{2^{2m}}{3^{3m}}.}$$

(c) Sachant que $U_n = m$, la variable aléatoire V_n correspond au nombre de succès des événements $[Z_k = j]$ correspondant aux indices tels que $Z_k \neq 1$ (et donc répétés seulement $n - m = 2m$ fois).

Par ailleurs, toujours dans cette circonstance, les Z_k concernés ne peuvent prendre que les deux valeurs j et j^2, qui sont de plus équiprobables (on a $P_{[Z_k \neq 1]}(Z_k = j) = \frac{1/3}{2/3} = P_{[Z_k \neq 1]}(Z_k = j^2)$) et donc nous sommes en présence d'une répétition de $2m$ schémas de Bernoulli indépendants ayant une probabilité de succès de $1/2$.

On a donc :

$$\boxed{P_{U_n=m}(V_n = m) = \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2m-m} = 2^{-2m}\binom{2m}{m}.}$$

(d) Puisque $n = 3m$, on a d'abord, d'après la questions 3.(c), $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = m$ et $V_n = m$ (car $U_n + V_n + W_n = n = 3m$ selon 3.(a)).

Ainsi, d'après les deux questions précédentes,

$$\boxed{p_3m = P(U_n = m, V_n = m) = P(U_n = m)P_{U_n=m}(V_n = m) = 3^{-3m}\binom{3m}{m}\binom{2m}{m}.}$$

5. Pour $m \geqslant 1$ un entier, l'inégalité $\frac{m}{m+1} \leqslant \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}$ équivaut à

$$\begin{aligned} 9(m+1)m &\leqslant (3m+1)(3m+2), \\ 0 &\leqslant 2, \end{aligned}$$

ce qui est vrai. Ainsi, on a donc bien (d'après le résultat admis) :

$$\boxed{\text{pour tout entier } m \geqslant 1,\ \frac{p_{3(m+1)}}{p_{3m}} \geqslant \frac{m}{m+1}.}$$

On en déduit encore que $p_{3m} \geqslant \frac{2}{9m}$ par récurrence sur l'entier $m \geqslant 1$.
Initialisation D'après la formule obtenue en 4.(d), on a :

$$p_3 = 3^{-3}\binom{3}{1}\binom{2}{1} = \frac{2}{9},$$

ce qui prouve l'initialisation.
Hérédité Si le résultat est acquis à un certain rang m alors, d'après l'inégalité précédente,

$$p_{3(m+1)} \geqslant p_{3m} \times \frac{m}{m+1} \geqslant \frac{2}{9m} \times \frac{m}{m+1} = \frac{2}{9(m+1)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.
Le principe de récurrence nous permet donc de conclure :

$$\boxed{\text{pour tout entier } m \geqslant 1,\ p_{3m} \geqslant \frac{2}{9m}.}$$

6. (a) Notons, pour k entier de $[1, n]$, Y_k qui vaut 1 si $S_k = 0$ et 0 sinon.
Il est clair que Y_k est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $P(S_k = 0) = p_k$.
De plus, $Y_1 + \cdots + Y_n$ correspond au nombre d'entiers k de $[1, n]$ tels que $S_k = 0$; on a donc bien $Y_1 + \cdots + Y_n = U_n$.

(b) Puisque Y_k est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p_k pour tout entier k de $[1, n]$, on a $E(Y_k) = p_k$ et donc, d'après la propriété (de linéarité de l'espérance) admise,

$$\boxed{E(X_n) = p_1 + \cdots + p_n.}$$

(c) D'après la question précédente, la suite de terme général $E(X_n)$ est croissante. On a, en effet, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$E(X_{n+1}) - E(X_n) = p_{n+1} \geqslant 0.$$

Par théorème de la limite monotone, on aura $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = +\infty$ si la suite de terme général $E(X_n)$ n'est pas majorée.

On a de plus, d'après la question précédente et pour $m \geqslant 1$ un entier :

$$E(X_{6m}) - E(X_{3m}) = p_{3m+1} + \cdots + p_{6m} \geqslant p_{3(m+1)} + \cdots + p_{3(2m)} \geqslant \frac{2}{9}\left(\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}\right).$$

Or puisque tous les m termes de la somme de droite sont supérieurs à $1/(2m)$, on a

$$\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m} \geqslant m \times \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

et donc, pour tout entier $m \geqslant 1$,

$$\boxed{E(X_{6m}) - E(X_{3m}) \geqslant \frac{1}{9}.}$$

On en déduit encore, par récurrence immédiate sur l'entier $m \geqslant 0$:

$$E(X_{3\times 2^m}) \geqslant \frac{m}{9},$$

ce qui montre que la suite de terme général $E(X_n)$ n'est pas majorée. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} E(X_n) = +\infty.}$$

Remarque. On peut aussi utliser l'inégalité[2] $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout réel $x > -1$.

On en alors en effet (toujours d'après la question 5), pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$p_{3m} \geqslant \frac{2}{9}\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{2}{9}\left(\ln(m+1) - \ln(m)\right)$$

d'où, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$E(X_{3m}) \geqslant p_3 + \cdots + p_{3m} \geqslant \frac{2}{9}\ln(m+1)$$

par éliminations successives. Puisque la suite de terme général $E(X_n)$ n'est pas majorée, on peut conclure comme ci-dessus.

7. (a) La suite (q_n) est majorée par 1 (c'est une suite de probabilités). De plus, on a $X_n \leqslant X_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et donc $X_n > 0$ entraîne $X_{n+1} > 0$ de sorte que $q_n = P(X_n > 0) \leqslant P(X_{n+1} > 0) = q_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

La suite (q_n) est donc croissante et majorée par 1 ; <u>elle admet une limite q qui est un majorant de (q_n)</u> (d'après le théorème de la limite monotone).

Puisque $q_n \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, on a également (par passage à la limite dans les inégalités larges) $q \leqslant 1$ de sorte que :

$$\boxed{\text{pour tout } n,\ q_n \leqslant q \leqslant 1.}$$

(b) Raisonnons par récurrence sur l'entier $r \geqslant 1$ pour montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(X_n \geqslant r) \leqslant q^r$.

<u>Initialisation</u> On a d'abord, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(X_n \geqslant 1) = P(X_n > 0) = q_n \leqslant q$ d'après la question précédente. Le résultat est donc vérifié pour $r = 1$.

<u>Hérédité</u> Supposons le résultat acquis à un certain rang r et prouvons-le au rang $r+1$.

Considérons $n \geqslant 1$ et notons également, pour tout entier k de $[1, n]$, A_k l'événement $S_i \neq 0$ pour tout entier naturel $i < k$ et $S_k = 0$.

D'après la formule des probabilités totales, on a d'abord :

$$P(X_n \geqslant r+1) = P_{A_1}(X_n \geqslant r+1)P(A_1) + \cdots + P_{A_n}(X_n \geqslant r+1)P(A_n).$$

De plus, sachant que A_k est réalisé pour un certain entier k de $[1, n]$, l'événement $X_n \geqslant r+1$ est réalisé si et seulement s'il y a au moins r entiers j de $[k+1, n]$ tels que $S_j = 0$. On a donc $P_{A_k}(X_n \geqslant r+1) = P(X_{n-k} \geqslant r) \leqslant q^r$ et ainsi

$$P(X_n \geqslant r+1) \leqslant q^r(P(A_1) + \cdots + P(A_n)) = q^{r+1}$$

car $[X_n > 0]$ est la réunion disjointe des événements $A_1, \cdots, A_n$.

2. classique, à redémontrer grâce à une étude de fonction

D'après le principe de récurrence, on a donc bien montré :

$$\boxed{\text{pour tous } r, n \text{ entiers naturels non nuls, } P(X_n \geqslant r) \leqslant q^r.}$$

(c) Montrons tout d'abord que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $E(X_n) = \sum_{r=1}^{n} P(X_n \geqslant r)$ (on réutilise le symbole Σ du problème I).

Pour $n \geqslant 1$ un entier, la définition de l'espérance fournit en effet :

$$E(X_n) = \sum_{r=0}^{n} rP(X_n = r)$$

et donc, en notant que $P(X_n = r) = P(X_n \geqslant r) - P(X_n \geqslant r+1)$ pour tout entier naturel r,

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{r=0}^{n} r\,(P(X_n \geqslant r) - P(X_n \geqslant r+1)) \\ &= \sum_{r=0}^{n} rP(X_n \geqslant r) - \sum_{r=0}^{n} rP(X_n \geqslant r+1) \\ &= 0 + \sum_{r=1}^{n} rP(X_n \geqslant r) - \left(\sum_{r'=1}^{n} (r'-1)P(X_n \geqslant r') + nP(X_n \geqslant n+1)\right) \end{aligned}$$

en remplaçant r par $r' = r+1$ dans la deuxième somme. On en déduit donc bien (puisque $P(X_n \geqslant n+1) = 0$) :

$$\boxed{E(X_n) = \sum_{r=1}^{n} (r - (r-1))P(X_n \geqslant r) = \sum_{r=1}^{n} P(X_n \geqslant r)}$$

car une somme ne dépend pas de son indice de sommation.

On a donc bien, selon la question précédente,

$$\boxed{E(X_n) = P(X_n \geqslant 1) + \cdots + P(X_n \geqslant n) \leqslant q + \cdots + q^n.}$$

(d) Raisonnons par l'absurde et supposons au contraire que $q \neq 1$ c'est-à-dire que $q < 1$.

Alors, d'après la question précédente, on aurait, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$E(X_n) \leqslant q\frac{1-q^n}{1-q} \leqslant \frac{q}{1-q}$$

en reconnaissant la somme de termes en progression géométrique.

En particulier, la suite de terme général $E(X_n)$ serait majorée, ce qui est absurde (car elle tend vers $+\infty$).

On a donc nécessairement $q = 1$ soit encore $\boxed{\lim_{n\to\infty} q_n = 1}$.