CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2008

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

## (Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

*L'énoncé comporte trois exercices indépendants.*

*Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.*

*Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

## Exercice I

On munit le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $S$ la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de $S$ ?
2. Pour tout couple $(u,v)$ de nombre réels on note $U$ le point de coordonnées $(u,v)$, et pour $x$ dans $\mathbf{R}$ on note $M(x)$ le point de $S$ d'abscisse $x$. On pose

$$f_U(x) = UM(x), \qquad g_U(x) = \left[f_U(x)\right]^2.$$

   (a) Calculer $g_U, g'_U$, et $g''_U$. Résoudre l'équation $g''_U(x) = 0$.

   (b) Donner le tableau des variations de $f_U$ (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où $f_U$ admet un extremum relatif).

3. On dira qu'un cercle $C$ de centre $U$ et de rayon $UM$ est tangent en $M$ à $S$ si $M$ est un point de $S$ et si les tangentes en $M$ à $C$ et $S$ coincident.

   Soit $U$ un point du plan n'appartenant pas à $S$, et soit $a$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que le cercle de centre $U$ et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ à $S$ si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à $S$ est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à $S$.

   (b) Pour $U$ n'appartenant pas à $S$, on note $n(U)$ le nombre de réels $x$ pour lesquels le cercle de centre $U$ et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à $S$. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points $U$ n'appartenant pas à $S$ tels que $n(U) = i$. On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.

   Faire un croquis représentant $S$ et les ensembles trouvés.

5. (a) Soit $a$ dans $\mathbf{R}$. On note $D(a)$ la tangente en $M(a)$ à $S$. Donner une équation de $D(a)$.

   (b) On note de nouveau $U$ le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(u,v)$. Discuter en fonction de $u$ et $v$ l'ensemble des solutions $a$ de l'équation $U \in D(a)$.

   (c) On suppose que l'équation $U \in D(a)$ admet deux solutions distinctes $a_1$ et $a_2$. Montrer que, si $UM(a_1) = UM(a_2)$, alors on a $u = 0$.

   (d) Soit $U \in \mathscr{P}$. On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre $U$ tangent à $S$ en deux points distincts $M$ et $N$ de $S$. Montrer que les tangentes à $S$ en $M$ et $N$ sont concourantes, et que si l'on note $V$ leur point d'intersection on a $VM = VN$.

   (e) Déterminer l'ensemble des points $U$ n'appartenant pas à $S$ pour lesquels il existe un cercle de centre $U$ tangent à $S$ en deux points distincts de $S$.

## Exercice II

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. On considère un triangle $ABC$ dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées $Oy$. À toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à $Oy$ on associe les points $A'$, $B'$ et $C'$ intersections de $\mathscr{D}$ avec les parallèles à $Oy$ menées par $A$, $B$ et $C$ respectivement.

   Montrer qui existe une unique droite $\mathscr{D}$ pour laquelle la somme $s$ des longueurs $AA'+BB'+CC'$ est minimale, et la caractériser.

2. Montrer qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ pour laquelle la somme $s_1$ des distances de $A$, $B$ et $C$ à $\mathscr{D}$ est minimale. Montrer que cette droite est unique si $ABC$ n'est pas isocèle, et la caractériser.

## Exercice III
## Les comptes « ronds »

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
   - 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
   - 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

   Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?

---