MA 07

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2007

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

Durée : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice 1

1. On a $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \left|\frac{x}{2}\right| \cdot$
2. Plus généralement, soit γ une fonction sur $I = [-1, 1]$ vérifiant $\gamma(0) = 0$ et pour laquelle il existe une constante positive k telle que $|\gamma(x)| \leqslant k|x|$ pour tout x de I.
   La fonction δ définie par $\delta(x) = |kx + \gamma(x)| - |kx|$ coïncide avec γ pour $x \geqslant 0$ et avec $-\gamma$ pour $x \leqslant 0$.
   On obtient donc une solution en prenant $\gamma(x) = \frac{t_2 - t_1}{2}(x)$ puis $f(x) = \frac{t_2 + t_1}{2}(x) + \delta(x)$.
   L'existence de k résulte du fait que $(t_2 - t_1)(x)$ est de la forme $Ax^2 + Bx$. $k = |A| + |B|$ convient.

Exercice 2

1. (a) Dans le cas contraire, on aurait $9\,! = 70 \times 72 \times 72 \leqslant 71^3$, ce qui n'est pas avéré.
   (b) Par exemple :

1	8	9
2	5	7
3	4	6

2. On raisonne par l'absurde. Soit M le plus grand produit des lignes et des colonnes du carré. On sait que $M \geqslant 72$, et l'on peut supposer que M est le produit des éléments de la première ligne.
   L'ensemble des produits strictement inférieurs à 90 que l'on peut former avec trois entiers distincts compris entre 1 et 9 est :
   $$\{6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 80, 84\}.$$
   Supposons $M = 84$. Aucune autre ligne n'a un produit multiple de 7, mais un produit de ligne est multiple de 5. Les produits de lignes sont donc à l'ordre près $(84, 80, 54)$ ou $(84, 60, 72)$.
   À l'ordre près des termes sur chaque ligne, on n'a que les trois cas :

3	4	7
2	5	8
1	6	9

3	4	7
2	5	6
1	8	9

2	6	7
3	4	5
1	8	9

   Supposons $M = 80$. Le produit de ligne multiple de 7 est nécessairement 63, et, toujours à l'ordre près, il n'y a qu'un cas :

2	5	8
1	7	9
3	4	6

   Enfin pour $M = 72$, les produits de lignes sont 72, 70, 72 et il n'y a encore qu'un cas :

1	8	9
2	5	7
3	4	6

   On constate que dans tous les cas les nombres 1 et 9 sont sur une même ligne, donc ne peuvent pas se trouver dans une même colonne.
   L'exemple initial montre que la constante 90 est la plus grande possible.

Problème

Partie I : Géométrie

1. On a $a^2 = b^2 + c^2$. Les médianes issues de A et B ont, dans un repère orthonormal d'axes (AB) et (AC), pour pentes respectives $\sqrt{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. (a) Cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B.

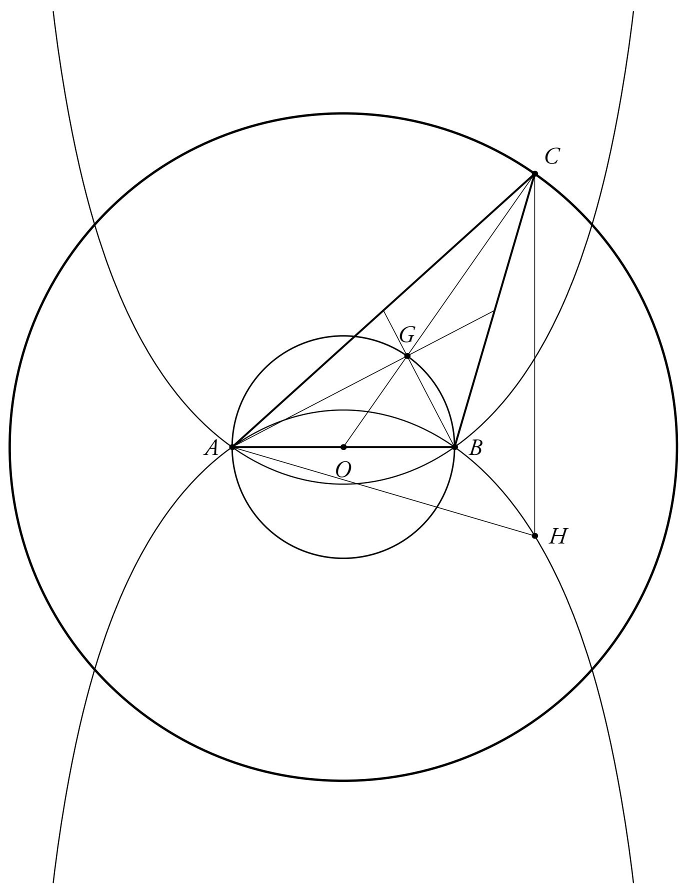
   (b) Homothétie $h(O, 3)$, O étant le milieu de AB.

   (c) Soit φ la mesure de l'angle en O dans le triangle AOC. La formule d'EUCLIDE-AL KASCHI donne
$$b^2 = c^2\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos\varphi\right),$$
   fonction dérivable de φ, à dérivée strictement positive, qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $]1, 4[$ lorsque φ décrit $]0, \pi[$. L'ensemble demandé est donc $]1, 2[$.

   (d) Si l'on note $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OC})$, H a pour abscisse $3\cos\theta$ et se trouve sur la hauteur issue de A, d'équation $(3\cos\theta - 1)(x+1) + 3\sin\theta\, y = 0$, d'où $f(x) = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{9-x^2}}$.

   La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ au point x est $\dfrac{x(x^2-17)}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, du signe de $-x$ sur l'intervalle d'étude $]-3, 3[$, d'où le tracé.

   Les droites d'équations $x = 3$ et $x = -3$, asymptotes verticales, n'ont pas été représentées.



3. (a) Si B' est le milieu de $[AC]$, G décrit le cercle de diamètre $B'A$ privé des points A et B', et C s'en déduit dans $h(B', 3)$, et décrit un cercle de rayon $\dfrac{3b}{2}$ et de centre O tel que $\overrightarrow{AO} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

(b) Soit φ la mesure de l'angle en O dans le triangle AOC. La formule d'Euclide-Al Kaschi donne

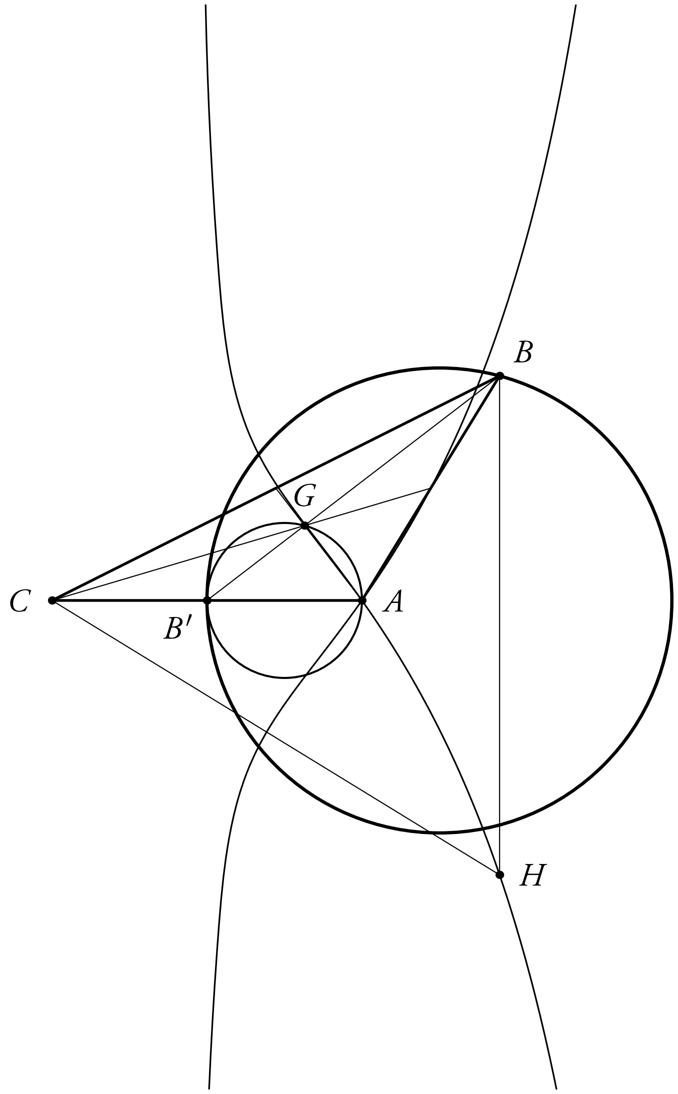
$$a^2 = b^2 \left(\frac{17}{8} - \frac{15}{8} \cos\varphi \right),$$

fonction dérivable de φ, à dérivée strictement positive, qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $\left]\dfrac{1}{4}, 4\right[$ lorsque φ décrit $]0, \pi[$. L'ensemble demandé est donc $]1/2, 2[$.

(c) Le cercle de rayon minimum passant par A et B est le cercle de diamètre $[AB]$, qui rencontre Γ' en deux points dont la projection K sur (AB) vérifie $\overrightarrow{B'K} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{B'A}$.

(d) Si l'on note $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB})$, H a pour abscisse $3\cos\theta$ et se trouve sur la hauteur issue de C, d'équation $(3\cos\theta + 1)(x+5) + 3\sin\theta y = 0$, d'où les équations cartésiennes $y = \pm\dfrac{(x+5)(x+1)}{\sqrt{9-x^2}}$.

La dérivée de $x \mapsto \dfrac{(x+5)(x+1)}{\sqrt{9-x^2}}$ au point x est $\dfrac{-x^3 + 23x + 54}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; le numérateur ne s'annule que pour une valeur de x, appartenant à l'intervalle $]5, 6[$, et la dérivée est par conséquent positive sur l'intervalle d'étude $]-3, 3[$, d'où le tracé. Cette fois encore, on n'a pas représenté les asymptotes verticales.



4. (a) On peut utiliser la formule de la médiane ou un calcul direct : l'orthogonalité des médianes se traduit par la relation $(2\,\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\,\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = 0$. Il suffit de développer et d'utiliser la relation d'EUCLIDE-AL KASHI.

   (b) La relation $a^2 + b^2 = 5c^2$ entraîne clairement $c^2 < (a+b)^2$. En revanche la relation $c^2 > (a-b)^2$ n'est vérifiée que si $\dfrac{b}{a}$ rend strictement négatif le trinôme $x \mapsto 2x^2 - 5x + 2$, c'est à dire pour $\dfrac{1}{2} < \dfrac{b}{a} < 2$. On retrouve le résultat du 3.(b).

Partie II : Arithmétique

A. Deux familles de triangles

1. (a) Il est clair que tout diviseur premier commun à a (resp. b) et c diviserait également b (resp. a).
   Un diviseur premier, autre que 5, commun à a et b, diviserait c.
   Enfin si 5 divisait a et b sans diviser c, alors le premier membre de la relation $(\star)$ serait divisible par 25, et le second membre seulement par 5, ce qui est absurde.

   (b) Si a et b étaient tous deux pairs, il devrait en être de même pour c, ce qui est contradictoire.

Si a et b étaient tous deux impairs, alors le premier membre de la relation ($\star$) serait congru à 2 modulo 4, ce qui est impossible pour le second membre.

(c) La relation ($\star$) entraîne $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0$ modulo 3 ce qui n'est possible que si a, b et c sont multiples de 3 – ce qui est exclu – ou premiers avec 3.
Les entiers u et v étant de parités différentes, $u^2 - uv - v^2$ et $u^2 + uv - v^2$ sont impairs, donc ni a ni b ne peuvent être multiples de 4.
Enfin il résulte de la question l'étude faite à la question précédente que ni a ni b ne peuvent être multiples de 5.

(d) On a $b^2 - 4a^2 = (b + 2a)(b - 2a)$. Il suffit de remarquer que, par exemple, les deux conditions $2a + b \equiv 0$ modulo 5 et $-a + 2b \equiv 0$ modulo 5 sont équivalentes (le produit de la première congruence par 3 donne la seconde, le produit de la seconde par 2 redonne la première).
Remarquons pour la suite qu'alors si de plus $0 < a < 2b$ et si $b < 2a$, alors le couple (α, β) associé à (a, b) est, dans chaque cas, un couple d'entiers strictement positifs.

(e) Il résulte des calculs du 1.(d) que si α et β sont premiers entre eux, le PGCD de a et b est soit 1 soit 5, cette dernière éventualité étant réalisée si $2\alpha - \beta \equiv 0$ modulo 5 dans le premier cas, ou si $2\alpha + \beta \equiv 0$ modulo 5 dans le deuxième cas.

2. Application directe de ce qui précède, compte tenu du 1.(d).
3. Il s'agit d'abord de vérifier les conditions $a > 0$, $b > 0$ et $\frac{1}{2} < \frac{b}{a} < 2$ (détermination de signes de trinômes).
La relation (1) demande que $\frac{u}{v} > 3$ et la relation (2) que $1 < \frac{u}{v} < 2$.
Il faut également que a et b ne soient pas des multiples de 5, ce qui conduit dans le cas de la relation (1) à éviter les couples (u, v) tels que 5 divise $u - 3v$, dans le cas de la relation (2) à éviter les couples (u, v) tels que 5 divise $u - 2v$.
4. On constate que si, par exemple, $2a - b$ et $2a + b$ étaient tous deux multiples de 5, alors il en serait de même pour a et b.
5. On trouve 2 triangles de type 1 et 3 de type 2 :

$v \backslash u$	3	4	5	6
1		(22,31,17)		(58,59,37)
2	(22,19,13)			
3		(38,41,25)		
4			(58,71,41)	

B. Entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$ et leurs diviseurs

1. En utilisant les relations $\omega^2 = \omega + 1$ et $\omega'^2 = \omega' + 1$ il vient :
$$(u^2 - uv - v^2)(u'^2 - u'v' - v'^2) = U^2 - UV - V^2$$
avec $U = uu' + vv'$ et $V = uv' + u'v - vv'$.
Le trinôme $x^2 + 4x - 1$ se prête à des calculs analogues.
2. (a) Comme 4 et p sont premiers entre eux, la relation $u^2 - uv - v^2 \equiv 0$ modulo p équivaut à $4u^2 - 4uv - 4v^2 \equiv 0$ modulo p soit $(2u - v)^2 \equiv 5v^2$ modulo p ou bien encore $(u + 2v)^2 \equiv 5u^2$ modulo p.

(b) Comme u et v sont premiers entre eux, p est premier avec u ou avec v.
Supposons que ce soit avec v ; comme p est strictement supérieur à 5, il ne divise pas $5v^2$, ni par conséquent $2u - v$.
On a alors $(2u - v)^{2q} \equiv 5^q v^{2q}$ modulo p, ce qui, par le théorème de Fermat, s'écrit $5^q \equiv 1$ modulo p.

(c) Soient j et j' deux entiers distincts compris entre 1 et q. Comme p est premier avec 5, r_j et $r_{j'}$ sont distincts. Si $r_j + r_{j'} = p$, alors p divise $j + j'$, ce qui est absurde car $3 \leqslant j + j' \leqslant p - 2$.
Il s'en suit que l'ensemble $\{f(1), f(2), \ldots, f(q)\}$ coïncide avec $\{1, 2, \ldots, q\}$, et qu'en multipliant les congruences $5j \equiv \varepsilon(j) f(j)$ modulo p on obtient :

$$5^q q! \equiv q!\, \varepsilon(1)\varepsilon(2)\cdots\varepsilon(q) \text{ modulo } p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(d) Lorsque j varie de 1 à q, on a $\varepsilon(j) = 1$ tant que $5j < p/2$, puis $\varepsilon(j) = -1$ jusqu'à ce que $5j$ dépasse p, *etc.* On obtient le résultat demandé.
La fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{4x}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3x}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor$ augmente de 2 lorsque x augmente de 10. Il suffit donc d'étudier sa parité pour x égal à 1, 3, 7 et 9, ce qui est aisé.

3. (a) Vu au 2.

(b) On a $-u^2 + 4uv + v^2 = 5v^2 - (u - 2v)^2 = (v + 2u)^2 - 5u^2$. En utilisant un raisonnement identique à celui de la question précédente, on voit que b n'a que des facteurs premiers congrus à 1 ou 9 modulo 10.