

# CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

---

SESSION DE 2007

---

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

**(Classe terminale S)**

DURÉE : 5 heures

---

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

*L'énoncé comporte trois exercices indépendants.*

*Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.*

*Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

## Exercice 1

On appelle fonctions de type  $T_0$  les fonctions « trinômes » sur  $[-1, 1]$ , définies par :

$$t : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto t(x) = ax^2 + bx + c,$$

$a, b, c$  étant des réels quelconques. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on appelle fonctions de type  $T_n$  les fonctions de la forme  $f + \lambda|g|$ ,  $\lambda$  étant un réel quelconque et  $f, g$  des fonctions quelconques de type  $T_{n-1}$ .

1. Établir que la fonction  $\varphi$ , définie par  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $x$  de  $[-1, 0]$  et  $\varphi(x) = x$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ , est de type  $T_1$ .
2. On considère deux fonctions trinômes  $t_1$  et  $t_2$  telles que  $t_1(0) = t_2(0)$  et on définit la fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  telle que :  
Pour tout réel  $x$  de  $[-1, 0]$ ,  $f(x) = t_1(x)$  et pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f(x) = t_2(x)$ .  
Démontrer qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que la fonction  $f$  soit de type  $T_N$ .

## Exercice 2

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1. (a) Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.  
(b) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

### Exercice 3

Dans tout l'exercice, étant donné un triangle non aplati  $ABC$ , on note  $a$ ,  $b$  et  $c$  les longueurs respectives des côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$ . On dira que ce triangle est de type  $\mathcal{W}$  si ses médianes issues de  $A$  et  $B$  sont perpendiculaires.

#### Partie I : Géométrie

1. Montrer qu'il existe des triangles  $ABC$  tels que l'on ait les relations :

$$c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}.$$

Établir qu'un tel triangle est rectangle en  $A$  et qu'il est de type  $\mathcal{W}$ .

2. Dans cette question on se fixe des points  $A$  et  $B$  et on considère l'ensemble  $\Gamma$  des points  $C$  tels que le triangle  $ABC$  soit de type  $\mathcal{W}$ .

- (a) Déterminer l'ensemble des points  $G$ , isobarycentres de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , lorsque  $C$  décrit  $\Gamma$ .  
(b) En déduire l'ensemble  $\Gamma$ .

- (c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport  $\frac{b}{c}$ .

- (d) Représenter l'ensemble des points  $H$ , orthocentres des triangles  $ABC$ , lorsque  $C$  décrit  $\Gamma$  (on se placera dans un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A$  et  $B$  aient pour coordonnées respectives  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$  et l'on déterminera une fonction  $f$  telle que l'ensemble des points  $H$  soit la réunion des deux courbes d'équations respectives  $y = f(x)$  et  $y = -f(x)$ ).

3. Dans cette question on se fixe des points  $A$  et  $C$  et on considère l'ensemble  $\Gamma'$  des points  $B$  tels que le triangle  $ABC$  soit de type  $\mathcal{W}$ .

- (a) Déterminer l'ensemble  $\Gamma'$ .

- (b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport  $\frac{a}{b}$ .

- (c) Déterminer les triangles  $ABC$  de type  $\mathcal{W}$  ayant un rayon du cercle circonscrit minimal.

- (d) Représenter l'ensemble des points  $H$ , orthocentres des triangles  $ABC$ , lorsque  $B$  décrit  $\Gamma'$  (on se placera dans un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A$  et  $C$  aient pour coordonnées respectives  $(-1, 0)$  et  $(-5, 0)$ ).

4. (a) Montrer qu'un triangle  $ABC$  est de type  $\mathcal{W}$  si, et seulement si, l'on a la relation

$$(\star) \quad a^2 + b^2 = 5c^2.$$

- (b) Étant donné des réels strictement positifs  $a$ ,  $b$  et  $c$  vérifiant la relation  $(\star)$ , donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport  $\frac{a}{b}$  pour que  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient les longueurs des côtés d'un triangle de type  $\mathcal{W}$ .

## Partie II : Arithmétique

### A. Deux familles de triangles

Dans la suite de l'exercice, on se propose de rechercher les triangles de type  $\mathcal{W}$  dont les côtés ont des longueurs entières, en commençant par rechercher l'ensemble  $\mathcal{T}$  des triplets  $(a, b, c)$  d'entiers naturels strictement positifs vérifiant la relation  $(\star)$ .

On remarque que pour qu'un triplet  $(a, b, c)$  d'entiers strictement positifs soit élément de  $\mathcal{T}$ , il suffit qu'il existe un entier strictement positif  $m$  tel que le triplet  $(ma, mb, mc)$  soit élément de  $\mathcal{T}$ , de sorte qu'on peut se limiter à rechercher l'ensemble  $\mathcal{T}_1$  des éléments de  $\mathcal{T}$  sans facteur premier commun.

- (a) Montrer que si  $(a, b, c)$  est élément de  $\mathcal{T}_1$  alors les entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont premiers entre eux deux à deux.  
(b) Établir que si  $(a, b, c)$  est élément de  $\mathcal{T}_1$  alors  $a$  et  $b$  sont de parités différentes.  
(c) Montrer que si  $(a, b, c)$  est élément de  $\mathcal{T}_1$  alors  $a$  et  $b$  ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.  
(d) Soit  $(a, b, c)$  un élément de  $\mathcal{T}_1$ . Montrer que  $b^2 - 4a^2$  et  $a^2 - 4b^2$  sont des multiples de 5.

En déduire qu'il existe un couple d'entiers  $(\alpha, \beta)$  tels que l'on ait 
$$\begin{cases} 2a + b &= 5\alpha \\ -a + 2b &= 5\beta \end{cases}$$
 ou 
$$\begin{cases} 2a - b &= 5\alpha \\ a + 2b &= 5\beta \end{cases}$$
. Vérifier alors que l'on a  $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$ , et que  $\alpha$  et  $\beta$  sont premiers entre eux.

- (e) Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers premiers entre eux, les entiers  $a$  et  $b$  qui leur sont associés par les relations ci-dessus sont-ils premiers entre eux ?

On admet désormais le résultat suivant : les triplets  $(x, y, z)$  d'entiers strictement positifs sans facteur premier commun, vérifiant la relation  $x^2 + y^2 = z^2$  et tels que  $y$  soit pair, sont donnés par  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$  et  $z = u^2 + v^2$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, de parités différentes et tels que  $u > v$ , déterminés de manière unique.

- On dira qu'un triangle est de type  $\mathcal{W}_e$  s'il est de type  $\mathcal{W}$  et si les longueurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  de ses côtés sont des entiers sans facteur premier commun. Montrer que pour tout triangle de type  $\mathcal{W}_e$ , il existe des entiers strictement positifs  $u$  et  $v$ , premiers entre eux, de parités différentes et vérifiant  $u > v$ , tels que l'une des deux relations suivantes soit vérifiée :

$$(1) \quad (a, b, c) = (2(u^2 - uv - v^2), u^2 + 4uv - v^2, u^2 + v^2)$$

$$(2) \quad (a, b, c) = (2(u^2 + uv - v^2), -u^2 + 4uv + v^2, u^2 + v^2)$$

- Déterminer les ensembles de couples  $(u, v)$  d'entiers positifs tels que la relation (1) (respectivement (2)) conduise à un triangle de type  $\mathcal{W}_e$ .
- Établir qu'un triangle de type  $\mathcal{W}_e$  est donné par une seule des deux relations (1) ou (2).  
On classe ainsi les triangles de type  $\mathcal{W}_e$  en deux catégories disjointes, que l'on notera  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_2$ .
- Donner les longueurs des côtés des triangles de type  $\mathcal{W}_e$  dont le « petit » côté  $c$  a une longueur inférieure ou égale à 50.

## B. Entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$ et leurs diviseurs

On se propose d'étudier les facteurs premiers supérieurs ou égaux à 7 des entiers  $a$  et  $b$ , longueurs des côtés  $BC$  et  $CA$  d'un triangle de type  $\mathcal{W}_e$ .

1. On note  $\omega$  et  $\omega'$  les solutions de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ .  
Établir la relation  $u^2 - uv - v^2 = (u - \omega v)(u - \omega' v)$ . En déduire que l'ensemble des entiers de la forme  $u^2 - uv - v^2$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs arbitraires, est stable par multiplication.  
Que peut-on dire de l'ensemble des entiers de la forme  $u^2 + 4uv - v^2$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs arbitraires?
2. Soit  $p = 2q + 1$  un nombre premier strictement supérieur à 5 qui divise un entier de la forme  $u^2 - uv - v^2$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs premiers entre eux.
  - (a) Établir les congruences  $(2u - v)^2 \equiv 5v^2$  modulo  $p$  et  $(u + 2v)^2 \equiv 5u^2$  modulo  $p$ .
  - (b) En déduire que  $5^q \equiv 1$  modulo  $p$ .
  - (c) Soit  $j$  un entier compris entre 1 et  $q$ , on note  $r_j$  le reste de la division de  $5j$  par  $p$ . Si  $r_j \leq q$  on pose  $f(j) = r_j$  et  $\varepsilon(j) = 1$ ; dans le cas contraire on pose  $f(j) = p - r_j$  et  $\varepsilon(j) = -1$ , de sorte que l'on a dans tous les cas  $1 \leq f(j) \leq q$  et  $5j \equiv \varepsilon(j)f(j)$  modulo  $p$ .  
Montrer que les entiers  $f(1), f(2), \dots, f(q)$  sont deux à deux distincts et en déduire que le nombre d'entiers  $j$ , compris entre 1 et  $q$  et tels que  $\varepsilon(j) = -1$ , est pair.
  - (d) Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $\lfloor x \rfloor$  sa partie entière, à savoir le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .  
Montrer que  $\left\lfloor \frac{4p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3p}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor$  est pair, puis que  $p \equiv \pm 1$  modulo 10.
3. Soient  $(a, b, c)$  les longueurs des côtés d'un triangle de type  $\mathcal{W}_e$ .
  - (a) Montrer que tous les facteurs premiers impairs de  $a$  sont congrus à 1 ou à 9 modulo 10.
  - (b) Que peut-on dire des facteurs premiers de  $b$ ?