Géométrie _ Equations de droites

Exercice 1 : Cinéma et concert

Sous thème : Coordonnées d'un point, droites (livre Maths, 2nde, Nathan 2010)

Un groupe d'amis, dont certains sont étudiants, va au cinéma. Le prix d'une place est de 4€ pour les étudiants et de 6€ pour les autres. Pour le groupe, le prix total des places est de 104€.

Ce même groupe assiste quelques jours plus tard à un concert. Le prix d'une place est de 18€ pour les étudiants et de 30€ pour les autres. Pour le groupe, le prix total des places est de 480€.

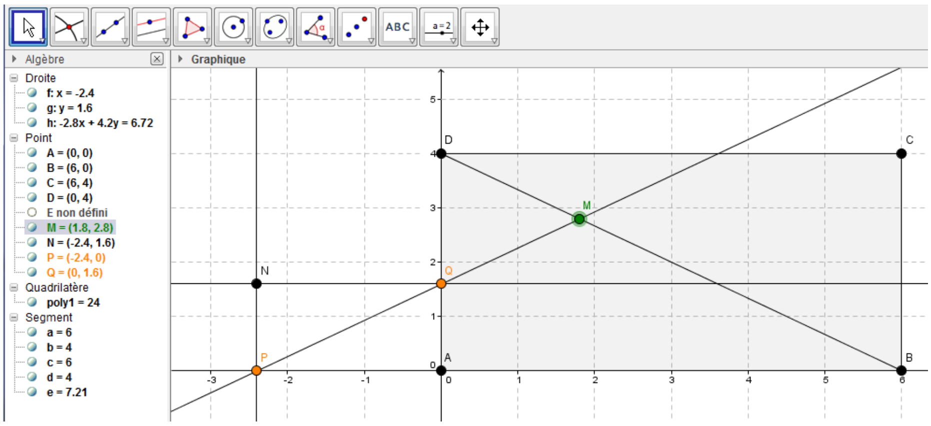
Trouver la proportion d'étudiants de ce groupe.

Exercice 2 : Trois points alignés ? (source : Maths, 2nde, Nathan 2010)

ABCD est un rectangle de longueur 6 et de largeur 4. M est un point du segment [BD], N est le symétrique de C par rapport à M.

La parallèle à (AD) menée par N coupe (AB) en P.

La parallèle à (AB) menée par N coupe (AD) en Q.



Les points M, P et Q sont-ils alignés ?

Eléments de correction : Géométrie _ Equations de droites

Exercice 1 : Cinéma et concert

Résoudre le système : $\begin{cases} 4x + 6y = 104 \\ 18x + 30y = 480 \end{cases}$

Méthode 1 : Résoudre le système par le calcul (Méthode par combinaison linéaire ou par substitution).

Méthode 2 : Résolution de ce système par la méthode graphique (coordonnées du point d'intersection des 2 droites).

Exercice 2 : Trois points alignés ?

Déterminer les coordonnées des points suivants :

A(0,0) ; B(6,0) ; C(6,4) ; D(0,4) ; $M\left(m, -\frac{2}{3}m + 4\right)$; $N\left(2m - 6, -\frac{4}{3}m + 4\right)$;

$P(2m - 6{,}0)$ et $Q\left(0, -\frac{4}{3}m + 4\right)$

Méthode 1 : Montrer que 2 vecteurs sont colinéaires par exemple : les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$.

Méthode 2 : Déterminer l'équation de la droite (MQ) : $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}m + 4$

et vérifier que $P \in (MQ)$.

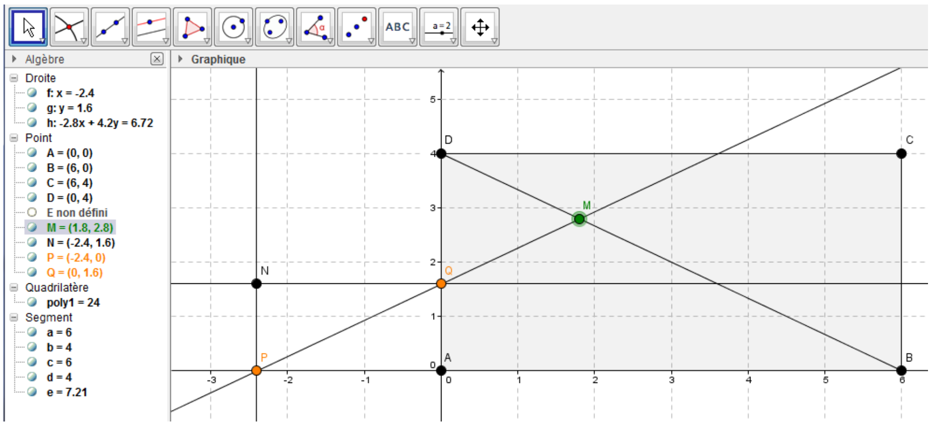
Géométrie _ Vecteurs

Exercice 1 : Trois points alignés ? (source : Maths, 2nde, Nathan 2010)

ABCD est un rectangle de longueur 6 et de largeur 4. M est un point du segment [BD], N est le symétrique de C par rapport à M.

La parallèle à (AD) menée par N coupe (AB) en P.

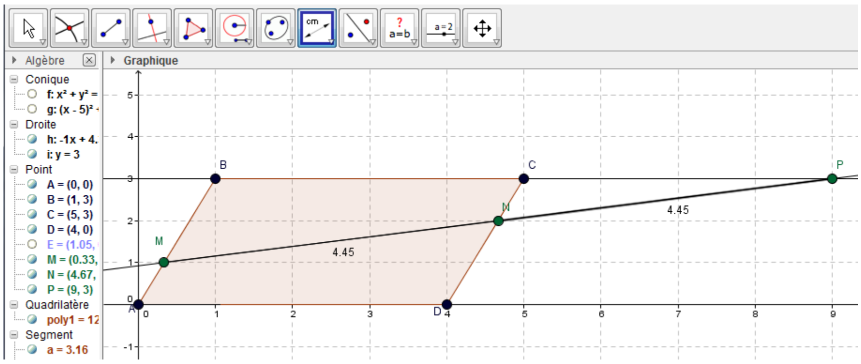
La parallèle à (AB) menée par N coupe (AD) en Q.



Les points M, P et Q sont-ils alignés ?

Exercice 2 : Un milieu (source : Maths, 2nde, Nathan 2010)

ABCD est un parallélogramme, M est le point de [AB] tel que $AM = \frac{1}{3}AB$ et et N est le point de [DC] tel que $CN=13DC$. La droite (MN) coupe (BC) en P.



Montrer que N est le milieu du segment [MP].

Pour aller plus loin : montrer que C est aussi le milieu de [BP].

Exercice 3 : Droites parallèles (source : Maths, 2^{nde}, Nathan 2010)

ABCD est un parallélogramme. E et G sont les points tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.

La droite parallèle à (AD) passant par E coupe (CD) en F.

La droite parallèle à (AB) passant par G coupe (BC) en H.

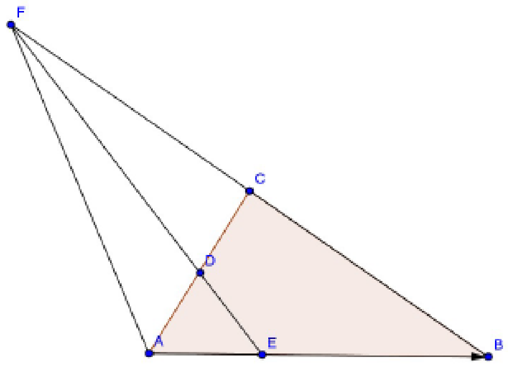
Montrez que les (GF), (EH) et (AC) sont parallèles.

Exercice 4 : Points alignés ($1^{ère}$ S)

ABC est un triangle quelconque.

D est le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et F le point tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$.

Montrer que les points D, E et F sont alignés.



Eléments de correction : Géométrie _ Vecteurs

Exercice 1 : Trois points alignés ?

Déterminer les coordonnées des points suivants :

A(0,0) ; B(6,0) ; C(6,4) ; D(0,4) ; $M\left(m, -\frac{2}{3}m+4\right)$; $N\left(2m-6, -\frac{4}{3}m+4\right)$;

$P(2m-6{,}0)$ et $Q\left(0, -\frac{4}{3}m+4\right)$

Méthode 1 : Montrer que 2 vecteurs sont colinéaires par exemple : les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$.

Méthode 2 : Déterminer l'équation de la droite (MQ) : $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}m + 4$

et vérifier que $P \in (MQ)$.

Méthode 3 : Conjecture (et outil « lien entre 2 objets ») avec Géogébra.

Exercice 2 : Un milieu (source : Maths, 2nde, Nathan 2010)

Méthode 1 : Configuration de Thalès dans le triangle BMP :

$\frac{PM}{PN} = \frac{PB}{PC} = \frac{MB}{NC} = 2$ car $MB = 2NC$ d'où $PM = 2PN$ et N milieu de [MP].

Méthode 2 : Calcul vectoriel et relation de Chasles

Soit M' : le symétrique de M par rapport à N. Prouver que P et M' son confondus.
$\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MN}$
puis relation de Chasles : $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$
donc $M' = (BC) \cap (MN) = P$

Pour aller plus loin : Partir de $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$ puis relation de Chasles dans les 2 membres
$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}$ d'où $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CP}$ et C milieu de [BP].

Exercice 3 : Droites parallèles (source : Maths, 2nde, Nathan 2010)

Méthode 1 : Colinéarité de 3 vecteurs.

Coordonnées dans la base $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$: A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1), $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$, $F\left(\frac{2}{5}, 1\right)$,
$G\left(0, \frac{3}{5}\right)$, $H\left(1, \frac{3}{5}\right)$. Puis montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
En déduire les 3 droites parallèles.

Méthode 2 : Coefficient directeur des droites
Coefficient directeur des droites (GF), (EH) et (AC) égaux à 1, donc les droites sont parallèles.

Méthode 3 : Relation de Chasles

A l'aide de la relation de Chasles, trouver des coefficients k et k' tels que : $\overrightarrow{GF} = k\overrightarrow{AC}$, et : $\overrightarrow{EH} = k'\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4 : Points alignés

Méthode 1 : Colinéarité de vecteurs et coordonnées des vecteurs

repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$\overrightarrow{EF}$ (-4/3 , 2) $\overrightarrow{ED}$ (-1/3 , 1/2) colinéaires d'où E, F et D alignés.

Méthode 2 : Calcul vectoriel, colinéarité de vecteurs

$$\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{AE} = \frac{-1}{2}\ \overline{AC} + \frac{1}{3}\ \overline{AB}$$

$$\overline{DF} = \overline{DB} + \overline{BF} = 3\ \overline{AB} + \frac{3}{2}\ \overline{AC}$$

Alors $\overrightarrow{DF} = -3\ \overrightarrow{DE}$ d'où l'alignement des points D, E et F.

Méthode 3 : Géométrie plane et droite des milieux

La parallèle à (DE) passant par C coupe (AB) en I. Or D est le milieu de [AC] d'où E est le milieu de [AI].

On en déduit que I est le milieu de [EB].

Dans EBF, la droite (CI) passe par les milieux des côtés [EB] et [BF] donc elle est parallèle au troisième côté [EF].

On a donc (DE) parallèle à (CI) passant par E, de même (EF) parallèle à (CI) passant par E, on en déduit que (DE) et (EF) sont confondues d'où l'alignement des points E, F et D.

Géométrie _ Configurations du plan

Exercice 1 : Points alignés (2nde)

ABCD est un carré de côté 8.

E appartient à la demi-droite [AB) et BE = 13. F appartient à la demi-droite [AD) et DF = 5.

Les points C, E et F sont-ils alignés ?

Eléments de correction : Géométrie _ Configurations du plan

Exercice 1 : Points alignés (2^{nde})

Méthode 1 : Théorème de Thalès

$\frac{13}{21} \neq \frac{8}{13}$ les rapports de Thalès ne sont pas égaux donc les points F, C et E ne sont pas alignés.

Méthode 2 : Colinéarité de vecteur et coordonnées dans un repère

Repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
$\overrightarrow{FC}\ (1, -5/8)$ $\overrightarrow{FE}\ (21/8, -13/8)$ $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FE}$ ne sont pas colinéaires donc les points F, C et E ne sont pas alignés.

Méthode 3 : Inégalité triangulaire

$FC^2 = 5^2 + 8^2 = 89$ $CE^2 = 8^2 + 13^2 = 233$ $FE^2 = 13^2 + 21^2 = 610$

$FE \neq FC + CE$ donc les points F, C et E ne sont pas alignés.

Méthode 4 : Résolution analytique

repère $(A, \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{8}\overrightarrow{AD})$

équation de la droite (FC) : $y = \frac{-5}{8}x + 13$

$E(21, 0) \notin (FC)$ donc les points F, C et E ne sont pas alignés.

Méthode 5 : Propriétés des angles correspondants

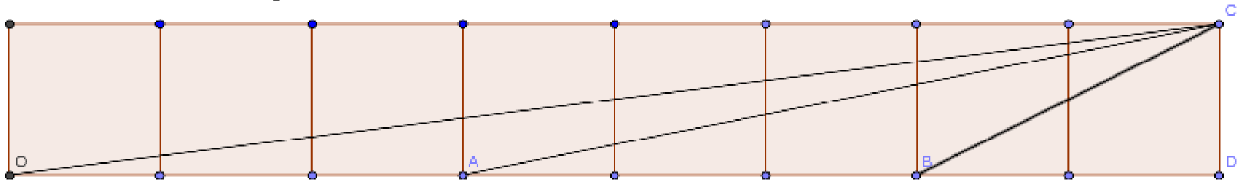
$\tan \widehat{DCF} = \frac{5}{8}$ $\tan \widehat{BEC} = \frac{8}{13}$

Les angles ne sont pas correspondants donc les points F, C et E ne sont pas alignés.

Géométrie _ Trigonométrie

Exercice 1 : Angles orientés (Terminale S)

Soit huit carrés identiques.



$a = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ $b = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $c = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$.

Quelle est la valeur de a + b + c ?

Eléments de correction : Géométrie _ Trigonométrie

Exercice 1 : Angles orientés (Terminale S)

Plusieurs possibilités pour établir les sinus et cosinus des angles a, b et c : par produits scalaires dans un repère orthonormal d'origine O, ou trigonométrie du triangle rectangle ou calculs d'aires, etc..

- **Méthode 1 :** utilisation des valeurs des sinus et cosinus obtenus.

  sin[(a + b) + c] = sin(a + b) cos c + cos(a + b) sin c

  = (sin a cos b + sin b cos a) cos c + sin c (cos a cos b – sin a sin b)

  = sin a cos b cos c + sin b cos a cos c + sin c cos a cos b – sin c sin a sin b

$$\sin(a+b+c) = \frac{1}{\sqrt{65}}\times\frac{5}{\sqrt{26}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{26}}\times\frac{8}{\sqrt{65}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{8}{\sqrt{65}}\times\frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{65}}\times\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$= \dfrac{65}{\sqrt{65}\times\sqrt{130}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. a + b + c étant aigu, on en déduit qu'il vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

- **Méthode 2 :** Nombres complexes

  $z_A = 3$ $z_B = 6$ $z_C = 8 + i$ $z_D = 8$.

$$a+b+c = \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) + \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{z_C(z_C - z_A)(z_C - z_B)}{z_A(z_B - z_A)(z_D - z_B)}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{(8+i)(5+i)(2+i)}{3\times3\times2}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{65+65i}{18}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$