

Dichotomie : Résolution approchée d'une équation du type $f(x)=k$

Cas d'une fonction croissante - cas d'une fonction quelconque

Problème: une entreprise va fabriquer des millions de briques de jus fruits en carton. Elles doivent se présenter sous forme de pavés droits à base carrée, et de hauteur égale à trois fois le côté de la base.

Le volume désiré est 2 litres.

L'objectif est de déterminer les dimensions de ces briques au dixième de millimètre près pour le réglage des machines de fabrication.



Prérequis : amplitude et centre d'un intervalle, signe d'un produit, notions de logique, notions de base d'algorithmique

Vérification des prérequis :

- Donner l'amplitude de l'intervalle $[5 ; 9]$: , puis donner son centre :
Même question avec l'intervalle : $[1,724 ; 1,865]$. amplitude , centre :
- Nombres ayant des signes différents :
deux réels non nuls a et b ont des signes différents si et seulement si $a \times b \dots\dots 0$
- Notions de logique : x et y désignant des nombres réels, la négation (ou contraire) de $x > 3$ est ;
La négation de $x \neq 1$ et $x \neq 3$ est
La négation de $x \leq 2$ ou $y = 3$ est
- Autres prérequis nécessaires (non testés ici) : notions de base d'algorithmique, sens de variation d'une fonction .

PARTIE A : étude du problème.

On note x le côté du carré de base, exprimé en dm :

- Calculer le volume de la boîte en fonction de x , on le notera $f(x)$:

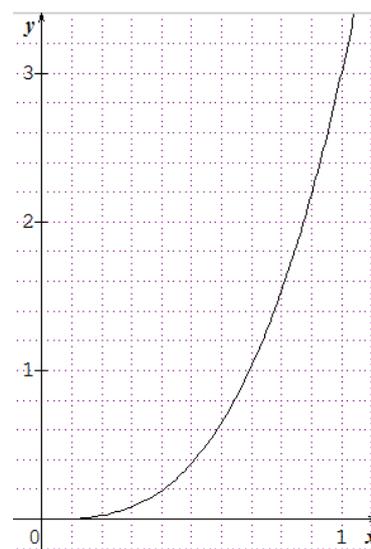
Pour trouver les dimensions des briques, il faut résoudre l'équation $f(x) = 2$, où x est un réel positif.

On peut démontrer que cette équation a une seule solution que l'on notera α . α n'est pas un nombre entier, ni même une fraction, on va se contenter de trouver une valeur approchée de la solution, respectant la précision désirée.

Résultats admis : f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, de plus, on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon.

- Calculer $f(1)$: $f(1) =$
- α est-il plus grand ou plus petit que 1 ? (rappel : l'unité est le dm)
.....
- A l'aide du graphique, donner un encadrement de α d'amplitude 0,1 :
 $\alpha \in [\dots ; \dots]$

$$f(x) = \dots\dots\dots$$



PARTIE B : Un premier algorithme de dichotomie

On va encadrer le nombre α dans des intervalles de plus en plus précis, en les recoupant à chaque fois en deux, d'où le nom de dichotomie.

➤ Au départ, α est dans l'intervalle $[a; b]$, avec $a = 0$ et $b = 1$.

1. Le centre de l'intervalle $[a; b]$ est : $m = \dots\dots\dots = \dots\dots$ (réponse en fonction de a et b , puis réponse décimale)

$$f(m) = \dots\dots\dots, f(\alpha) = \dots\dots$$

α est plus $\dots\dots\dots$ que m (compléter avec « petit » ou « grand », utiliser la croissance de f sur $[0; +\infty[$).

On peut donc donner un encadrement plus précis de α en remplaçant l'un des nombres a ou b par m , lequel ? $\dots\dots\dots$

2. On recommence plusieurs fois le même procédé pour obtenir des encadrements de plus en plus précis de α , Compléter le tableau suivant :

☞ Rappels : f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, $f(\alpha) = 2$

☞ rentrer l'expression de $f(x)$ dans la mémoire Y_1 de la calculatrice, utiliser la TABLE pour les calculs

☞ Pour les calculs de $f(m)$, on peut utiliser la fonction. Table de la calculatrice

		Donner la valeur exacte de m	Une valeur approchée de $f(m)$ peut suffire pour comparer à $f(\alpha)$	Compléter avec $<$ ou $>$	Compléter avec a ou b	Nouvel intervalle de recherche :	Amplitude de l'intervalle :
Etape 1	$a=0 \quad b=1$	$m= 0,5$	$f(m)=0,375$	$m < \alpha$	donc je remplace a par m	$\alpha \in [0,5; 1]$	0,5
Etape 2	$a= 0,5 \quad b=1$	$m=0,75$	$f(m) \approx 1,27$	$m < \alpha$	donc je remplace \dots par m	$\alpha \in [0,75; 1]$	0,25
Etape 3	$a= \dots \quad b=\dots$	$m=\dots\dots\dots$	$f(m) \approx \dots\dots\dots$	$m \dots \alpha$	donc je remplace \dots par m	$\alpha \in [\dots\dots; \dots\dots]$	$\dots\dots\dots$
Etape 4	$a= \dots \quad b=\dots$	$m=\dots\dots\dots$	$f(m) \approx \dots\dots\dots$	$m \dots \alpha$	donc je remplace \dots par m	$\alpha \in [\dots\dots; \dots\dots]$	$\dots\dots\dots$

L'intervalle obtenu après la quatrième étape n'est pas encore assez précis, puisque son amplitude est supérieure à 0,001 (0,001 est la précision visée dans l'énoncé du problème). Il est temps d'automatiser les calculs à l'aide d'un programme, pour cela, compléter d'abord l'algorithme :

Premier algorithme de résolution de l'équation $f(x) = k$

f est une fonction croissante sur $[a; b]$ telle que cette équation possède une solution sur $[a; b]$. On cherche un intervalle contenant la solution, l'intervalle ayant une amplitude inférieure ou égale à p .

Traduction dans Un langage de programmation	Algorithme n°1 pour une fonction <u>croissante</u>	Traduction sur calculatrice Programme : DICHOTO1
	<u>Entrées</u> f, k, a, b, \dots <small>il en manque une, trouvez-la !</small> <u>Traitement</u> tant que $b-a \dots p$ Compléter avec $<$ ou $>$ m prend la valeur $\dots\dots\dots$ si $f(m) < k$ alors \dots prend la valeur m Sinon \dots prend la valeur m fin du si fin du tant que <u>Sorties</u> Afficher a, b	

Utiliser le programme pour répondre au problème : $\alpha \in [\dots \dots \dots ; \dots \dots \dots]$

Comment peut-on vérifier la plausibilité des résultats ?

Phrase de conclusion pour répondre au problème :
.....

3. Test du premier algorithme

a. Tester le programme pour la résolution des équations suivantes :

Dans chaque cas, on donnera une valeur approchée à 10^{-6} de la solution grâce au programme

Equation	à résoudre dans	Solution exacte	Je prends	Le programme donne à 10^{-6} près
$x^2 = 2$	$[0; +\infty[$		$a = \dots$ et $b = \dots$	
$9x^2 = 5$	$]-\infty; 0[$		$a = \dots$ et $b = \dots$	
			$a = \dots$ et $b = \dots$	

b. Compléter la dernière ligne du tableau en choisissant une équation qui teste un cas particulier de l'algorithme : le cas où la solution de l'équation correspond à une valeur prise par m au cours de l'exécution.

PARTIE C : Un deuxième algorithme, général

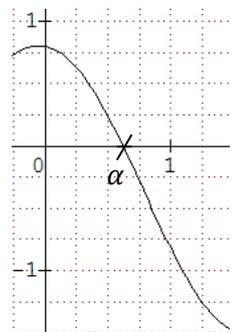
On cherche maintenant un algorithme qui permet de traiter les fonctions qui ne sont pas forcément croissantes.

1. Première étape : on transforme l'équation, pour exploiter des études de signes :

a. Compléter : pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) = k$ équivaut à = 0

Dans toute la suite, quitte à changer de fonction, on supposera que $k = 0$

b. On suppose que la courbe de f peut être tracée sans lever le crayon. Pour que l'équation $f(x) = 0$ ait au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$, il **suffit** que :



① $f(a)$ et $f(b)$ soient de même signes ② $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires

③ $f(a)$ ou $f(b)$ soient nuls rayez la ou les réponses fausses

c. Compléter : $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires si et seulement si $f(a) \times f(b) \dots 0$

2. On a vu dans la partie précédente que dans certains cas la solution cherchée correspondait à une valeur de m calculée pendant l'exécution de l'algorithme. Si ce cas se produit : il suffit d'arrêter la recherche !

Compléter l'algorithme :

- ① avec « < » ou « > » ② avec « ou » ou « et » ③ avec « = » ou « ≠ »

Traduction dans Un langage de programmation	Algorithme n°2 (définitif, à conserver)	Traduction sur calculatrice Programme : DICHOTOM
	<u>Entrées</u> f, a, b, p <u>Traitement</u> tant que $b-a$ ①... p ②... $f(m)$ ③... 0 m prend la valeur si $f(a) \times f(\dots) \leq 0$ alors b prend la valeur m Sinon ... prend la valeur m fin du si fin du tant que <u>Sorties</u> Si $f(m)$ ③... 0 Alors Afficher (« valeur exacte : », m) Sinon Afficher (« encadrement », a, b) FinSi	

PARTIE D : Approfondissement : Simplification de l’algorithme 2

Dans l’algorithme suivant, on ne prend plus en compte le cas où α peut être une valeur de prise par m en cours d’exécution, et l’on a remplacé \leq par $<$:

Traduction dans Un langage de programmation	Algorithme n°3	Traduction sur calculatrice Programme : DICHOTO2
	<p><u>Entrées</u> f, a, b, p</p> <p><u>Traitement</u> tant que $b-a \dots p$ <i>Compléter avec $<$ ou $>$</i> m prend la valeur si $f(a) \times f(\dots) < 0$ alors b prend la valeur m Sinon ... prend la valeur m fin du si fin du tant que</p> <p><u>Sorties</u> Afficher a, b</p>	

- c. Tester le programme avec les trois équations du tableau B.3.a. On constate une anomalie (un bug) dans une des applications de l’algorithme, avec quelle équation ?
- d. Quelle est la négation de la condition: $f(a) \times f(\) < 0$ donnée dans l’algorithme ci-dessus ?
- e. Dans le cas où m prend la valeur d’une solution de l’équation : quelle est la valeur suivante prise par a ?
 Puis par m ?, puis par a ?
 Cette solution appartient-elle au nouvel intervalle $[a;b]$ obtenu ?

Conclusion : cet algorithme ne fonctionne pas correctement dans le cas particulier où une solution de l’équation est obtenue comme valeur de m en cours d’exécution de l’algorithme. La prise en compte du cas où α est une valeur de prise par m en cours d’exécution est donc indispensable.