Dichotomie : Résolution approchée d'une équation du type *f(x)=k*

Cas d'une fonction croissante - cas d'une fonction quelconque

Problème: une entreprise va fabriquer des millions de briques de jus fruits en carton.
Elles doivent se présenter sous forme de pavés droits à base carrée, et de hauteur égale à trois fois le côté de la base.
Le volume désiré est 2 litres.
L'objectif est de déterminer les dimensions de ces briques au dixième de millimètre près pour le réglage des machines de fabrication.

Prérequis : amplitude et centre d'un intervalle, signe d'un produit, notions de logique, notions de base d'algorithmique

Vérification des prérequis :

1. Donner l'amplitude de l'intervalle [5 ; 9] : .... , puis donner son centre : ....
   Même question avec l'intervalle : [1,724 ; 1,865]. amplitude .... , centre : ....
2. Nombres ayant des signes différents :
   deux réels non nuls a et b ont des signes différents si et seulement si $a \times b$.........0
3. Notions de logique : x et y désignant des nombres réels, la négation (ou contraire) de $x > 3$ est .... ;
   La négation de $x \neq 1$ et $x \neq 3$ est ....
   La négation de $x \leq 2$ ou $y = 3$ est ....
4. Autres prérequis nécessaires (non testés ici) : notions de base d'algorithmique, sens de variation d'une fonction .

PARTIE A : étude du problème.

On note x le côté du carré de base, exprimé en dm :

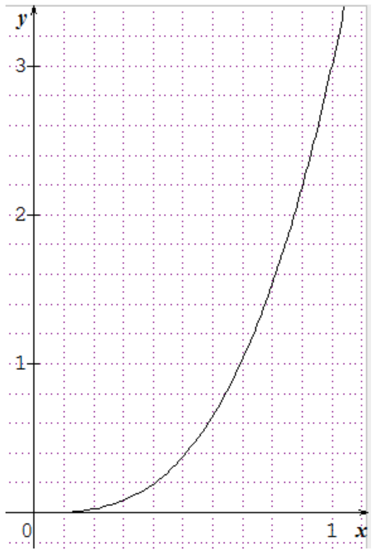
1. Calculer le volume de la boîte en fonction de x, on le notera *f(x)* :

f(x)=.........................

Pour trouver les dimensions des briques, il faut résoudre l'équation *f(x)* = 2, où x est un réel positif.

On peut démontrer que cette équation a une seule solution que l'on notera α. α n'est pas un nombre entier, ni même une fraction, on va se contenter de trouver une valeur approchée de la solution, respectant la précision désirée.

Résultats admis : f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, de plus, on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon.



2. Calculer $f(1)$: $f(1)$ =
3. α est-il plus grand ou plus petit que 1 ? (rappel : l'unité est le dm)
   ....
4. A l'aide du graphique, donner un encadrement de α d'amplitude 0,1 :
   $\alpha \in [\ldots\ldots; \ \ldots\ldots\ ]$

PARTIE B : Un premier algorithme de dichotomie

On va encadrer le nombre α dans des intervalles de plus en en plus précis, en les recoupant à chaque fois en deux, d'où le nom de dichotomie.

➢ Au départ, α est dans l'intervalle $[a; b]$, avec a = 0 et b = 1.

1. Le centre de l'intervalle $[a; b]$ est : m = …………… = ……. (réponse en fonction de a et b, *puis réponse décimale*)

$$f(m) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad , f(\alpha) = \ldots$$

α est plus ………………… que m (*compléter avec « petit » ou « grand »*, utiliser la croissance de f sur $[0; +\infty[$).

On peut donc donner un encadrement plus précis de α en remplaçant l'un des nombres a ou b par m, lequel ? ……….

2. On recommence plusieurs fois le même procédé pour obtenir des encadrements de plus en plus précis de α, Compléter le tableau suivant :
   ☞Rappels : f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, $f(\alpha) = 2$
   ☞ *rentrer l'expression de f(x) dans la mémoire Y_1 de la calculatrice, utiliser la* TABLE *pour les calculs*

➲ *Pour les calculs de $f(m)$, on peut utiliser la fonction. Table de la calculatrice*

		Donner la valeur exacte de m	*Une valeur approchée de f(m) peut suffire pour comparer à $f(\alpha)$*	Compléter avec $<$ ou $>$	Compléter avec a ou b	Nouvel intervalle de recherche :	Amplitude de l'intervalle :
Etape 1	a=0 b=1	m= 0,5	$f(m)$=0,375	$m < \alpha$	donc je remplace a par m	α∈ [0,5; 1]	0,5
Etape 2	a= 0,5 b=1	m=0,75	$f(m)$≈1,27	$m < \alpha$	donc je remplace …. par m	α∈ [0,75; 1]	0,25
Etape 3	a= …. b=….	m=………	$f(m)$ ≈…….	m … α	donc je remplace …. par m	α∈ [… … ; … . . .]	………
Etape 4	a= …. b=….	m=………	$f(m)$ ≈………	m … α	donc je remplace …. par m	α∈ [… … ; … . . .]	………

L'intervalle obtenu après la quatrième étape n'est pas encore assez précis, puisque son amplitude est supérieure à 0,001 (0,001 est la précision visée dans l'énoncé du problème). Il est temps d'automatiser les calculs à l'aide d'un programme, pour cela, compléter d'abord l'algorithme :

Premier algorithme de résolution de l'équation *f(x)* = k

f est une fonction croissante sur $[a ; b]$ telle que cette équation possède une solution sur $[a ; b]$. On cherche un intervalle contenant la solution, l'intervalle ayant une amplitude inférieure ou égale à p.

Traduction dans Un langage de programmation	**Algorithme n°1 pour une fonction <u>croissante</u>**	**Traduction sur calculatrice Programme : DICHOTO1**
	<u>Entrées</u> f, k, a, b, … *il en manque une, trouvez-la !* <u>Traitement</u> tant que b-a …. p *Compléter avec $<$ ou $>$* m prend la valeur ………… si $f(m) < k$ alors …. prend la valeur m Sinon …. prend la valeur m fin du si fin du tant que <u>Sorties</u> Afficher a, b	

Utiliser le programme pour répondre au problème : $\alpha \in [\dots\dots.\dots ; \dots\dots\dots.]$
Comment peut-on vérifier la plausibilité des résultats ? . ……………………………………………………………………………………
Phrase de conclusion pour répondre au problème :
…… …………………………

3. Test du premier algorithme
   a. Tester le programme pour la résolution des équations suivantes :
   Dans chaque cas, on donnera une valeur approchée à 10^{-6} de la solution grâce au programme

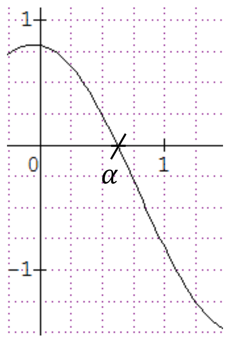
Equation	à résoudre dans	Solution exacte	Je prends	Le programme donne à 10^{-6} près
$x^2 = 2$	$[0; +\infty[$.		a= … et b = …	
$9x^2 = 5$	$[-\infty; 0[$		a= … et b = …	
			a= … et b = …	

   b. Compléter la dernière ligne du tableau en choisissant une équation qui teste un cas particulier de l'algorithme : le cas où la solution de l'équation correspond à une valeur prise par m au cours de l'exécution.

PARTIE C : Un deuxième algorithme, général

On cherche maintenant un algorithme qui permet de traiter les fonctions qui ne sont pas forcément croissantes.

1. Première étape : on transforme l'équation, pour exploiter des études de signes :
   a. Compléter : pour tout $\in [a; b]$, $f(x) = k$ équivaut à ………………………. = 0



   <u>Dans toute la suite, quitte à changer de fonction, on supposera que $k = 0$</u>

   b. On suppose que la courbe de f peut être tracée sans lever le crayon. Pour que l'équation $f(x) = 0$ ait au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$, il **suffit** que :

①$f(a)$ *et* $f(b)$ soient de même signes ② $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires
③ $f(a)$ ou $f(b)$ soient nuls *rayez la ou les réponses fausses*

   c. Compléter : $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires si et seulement si $f(a) \times f(b) \dots 0$

2. On a vu dans la partie précédente que dans certains cas la solution cherchée correspondait à une valeur de m calculée pendant l'exécution de l'algorithme. Si ce cas se produit : il suffit d'arrêter la recherche !
   Compléter l'algorithme :
   ① *avec* « $<$ » *ou* « $>$ » ② *avec* « ou » *ou* « et » ③ *avec* « $=$ » *ou* « $\neq$ »

Traduction dans Un langage de programmation	**Algorithme n°2 (définitif, à conserver)**	**Traduction sur calculatrice Programme : DICHOTOM**
	<u>Entrées</u> f, a, b, p <u>Traitement</u> tant que b-a ①…. p ②…. $f(m)$ ③… 0 m prend la valeur ………… si $f(a) \times f(\dots) \leq 0$ alors b prend la valeur m Sinon … prend la valeur m fin du si fin du tant que <u>Sorties</u> Si $f(m)$ ③… 0 Alors Afficher (« valeur exacte : » , m) Sinon Afficher (« encadrement », a, b) FinSi	

PARTIE D : Approfondissement : Simplification de l'algorithme 2

Dans l'algorithme suivant, on ne prend plus en compte le cas où α peut être une valeur de prise par m en cours d'exécution, et l'on a remplacé $\leq$ par $<$:

Traduction dans Un langage de programmation	**Algorithme n°3**	**Traduction sur calculatrice Programme : DICHOTO2**
	Entrées f, a, b, p Traitement tant que b-a …. p *Compléter avec $<$ ou $>$* m prend la valeur ………… si $f(a) \times f(\ldots) < 0$ alors b prend la valeur m Sinon … prend la valeur m fin du si fin du tant que Sorties Afficher a, b	

c. Tester le programme avec les trois équations du tableau B.3.a. On constate une anomalie (un bug) dans une des applications de l'algorithme, avec quelle équation ? ……………………………………….

d. Quelle est la négation de la condition: $f(a) \times f(\quad) < 0$ donnée dans l'algorithme ci-dessus ? ……………………………………………..

e. Dans le cas où m prend la valeur d'une solution de l'équation : quelle est la valeur suivante prise par a ? …..
Puis par m ? …., puis par a ? ….
Cette solution appartient-elle au nouvel intervalle [a;b] obtenu ?

Conclusion : cet algorithme ne fonctionne pas correctement dans le cas particulier où une solution de l'équation est obtenue comme valeur de m en cours d'exécution de l'algorithme. La prise en compte du cas où α est une valeur de prise par m en cours d'exécution est donc indispensable.