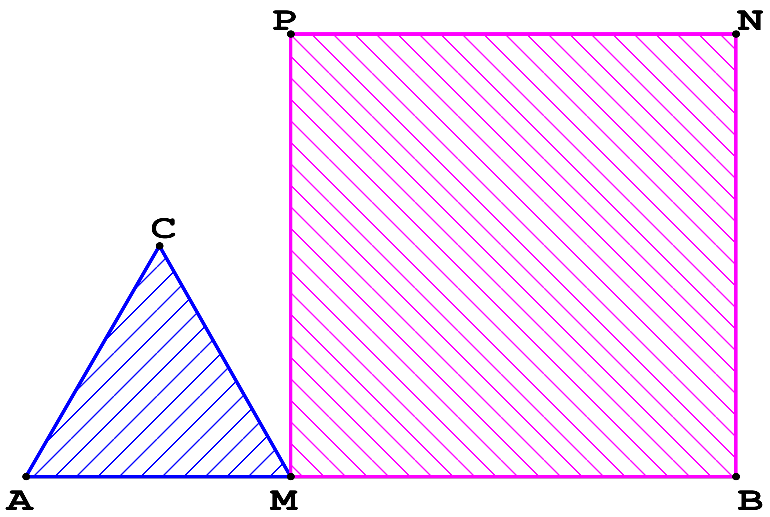
Le triangle et le carré.

D'après les documents d'accompagnement de l'option de 1°L,
utilisable aussi par des élèves de 2° et de première S

Le problème posé

Soit un segment [AB] de longueur donnée (par exemple 10) et M un point de ce segment.
Du même côté de [AB], on construit le triangle équilatéral AMC et le carré $MBNP$.
On pose $AM = x$.



1. Donner l'expression et la représentation de l'aire du triangle AMC en fonction de x.
2. Donner l'expression et la représentation de l'aire du carré $MBNP$ en fonction de x sur le même graphique que la question 1.
   Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMC et l'aire du carré $MBNP$ sont égales :
   - à l'aide du graphique,
   - par le calcul.
3. Etudier les variations de la somme des aires du triangle et du carré en fonction de x.
   Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimum ?

Quelques suggestions pour une étude avec un logiciel de construction géométrique

L'étude peut se dérouler en 5 phases.

1° phase : construction de la figure sur GéoplanW.

2° phase : réalisation des courbes demandées sur l'écran de l'ordinateur.
(On va utiliser le fait que le logiciel sait calculer l'aire d'un triangle et la longueur d'un segment pour se dispenser de la formalisation de ces calculs pour le moment).

3° phase : expression des aires en fonction de x et vérification des résultats.

4° phase : étude des variations de la somme $s(x)$ des aires du triangle et du carré en fonction de x ; recherche de la valeur de x pour laquelle cette aire est minimum.

5° phase : calculs pour justifier ou préciser certains résultats.

1° phase : construction de la figure sur GéoplanW

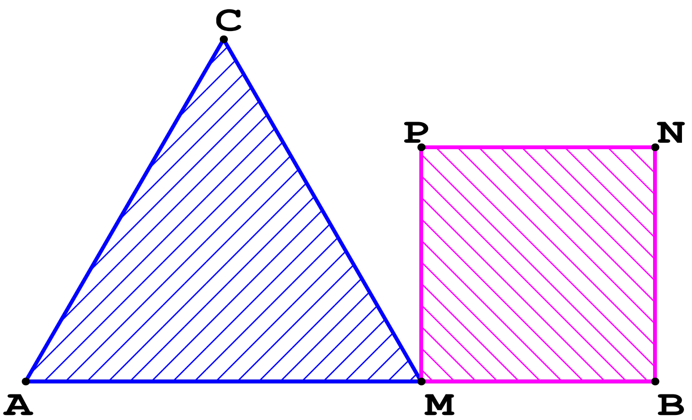
3 niveaux sont possibles :

- le professeur indique et dirige les manipulations à effectuer (incontournable avec des débutants).
- le professeur donne la marche à suivre et demande à des élèves qui ont un niveau convenable en géométrie d'expliquer pourquoi ces étapes aboutissent bien à la construction voulue.

A point de coordonnées (-11,0) dans le repère $\mathbf{R_{oxy}}$
B point de coordonnées (-1,0) dans le repère $\mathbf{R_{oxy}}$
Segment [**AB**]
M point libre sur le segment [**AB**]
C image de **M** par la rotation de centre **A** et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (radian)
t polygone **AMC**
N image de **M** par la rotation de centre **B** et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (radian)
P image de **B** par la rotation de centre **M** et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (radian)
k polygone **MBNP**

- le professeur laisse les élèves qui ont un bon niveau dans l'utilisation des transformations du plan (en particulier des rotations) et qui connaissent bien le logiciel GéoplanW se débrouiller pour réaliser la figure.

Il est également possible de préparer à l'avance cette figure sur une disquette, pour la fournir aux élèves.



Les élèves peuvent alors commencer à s’approprier le problème en déplaçant M sur $[AB]$.

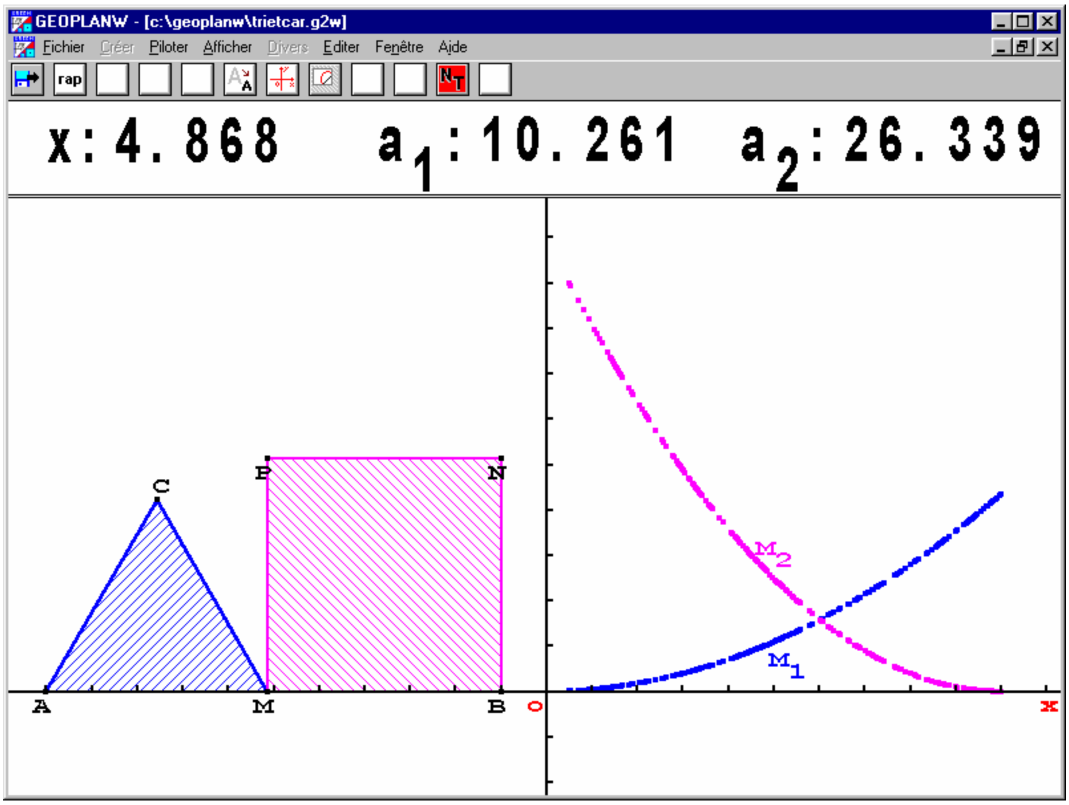
2° phase : réalisation des courbes demandées sur l'écran de l'ordinateur

On va utiliser le fait que le logiciel sait calculer l'aire d'un triangle et la longueur d'un segment pour se dispenser de la formalisation de ces calculs pour le moment.

x longueur du segment [**AM**] (unité de longueur $\mathbf{U}_{\mathbf{oxy}}$)
$\mathbf{a}_1$ aire du triangle **AMC** (unité de longueur $\mathbf{U}_{\mathbf{oxy}}$)
$\mathbf{r}_1$ repère $(\mathbf{o},\vec{\mathbf{i}},0.1\vec{\mathbf{j}})$ (graduations: 1,10)
$\mathbf{M}_1$ point de coordonnées $(\mathbf{x},\mathbf{a}_1)$ dans le repère $\mathbf{r}_1$
z longueur du segment [**MB**] (unité de longueur $\mathbf{U}_{\mathbf{oxy}}$)
$\mathbf{a}_2 = \mathbf{z}^2$
$\mathbf{M}_2$ point de coordonnées $(\mathbf{x},\mathbf{a}_2)$ dans le repère $\mathbf{r}_1$
----- AFFICHAGES -----
$\mathbf{A}_{\mathbf{f0}}$ affichage du scalaire $\mathbf{a}_1$ (3 décimales)
$\mathbf{A}_{\mathbf{f1}}$ affichage du scalaire $\mathbf{a}_2$ (3 décimales)
$\mathbf{A}_{\mathbf{f2}}$ affichage du scalaire **x** (3 décimales)
----- COMMANDES -----
$\mathbf{C}_{\mathbf{m0}}$ (touche **T**) dessin en bloc de $\mathbf{M}_1$
$\mathbf{C}_{\mathbf{m1}}$ (touche **C**) dessin en bloc de $\mathbf{M}_2$

Remarques.

• On obtient la trace des points M_1 et M_2 comme sur le graphique ci-dessous avec *Afficher , Sélection trace* , puis en sélectionnant les points M_1 et M_2 et enfin en actionnant le bouton rouge dans la barre des tâches (bien visible sur l'image ci-dessous).



Les élèves recherchent et notent la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle *AMC* et l'aire du carré *MBNP* sont égales.

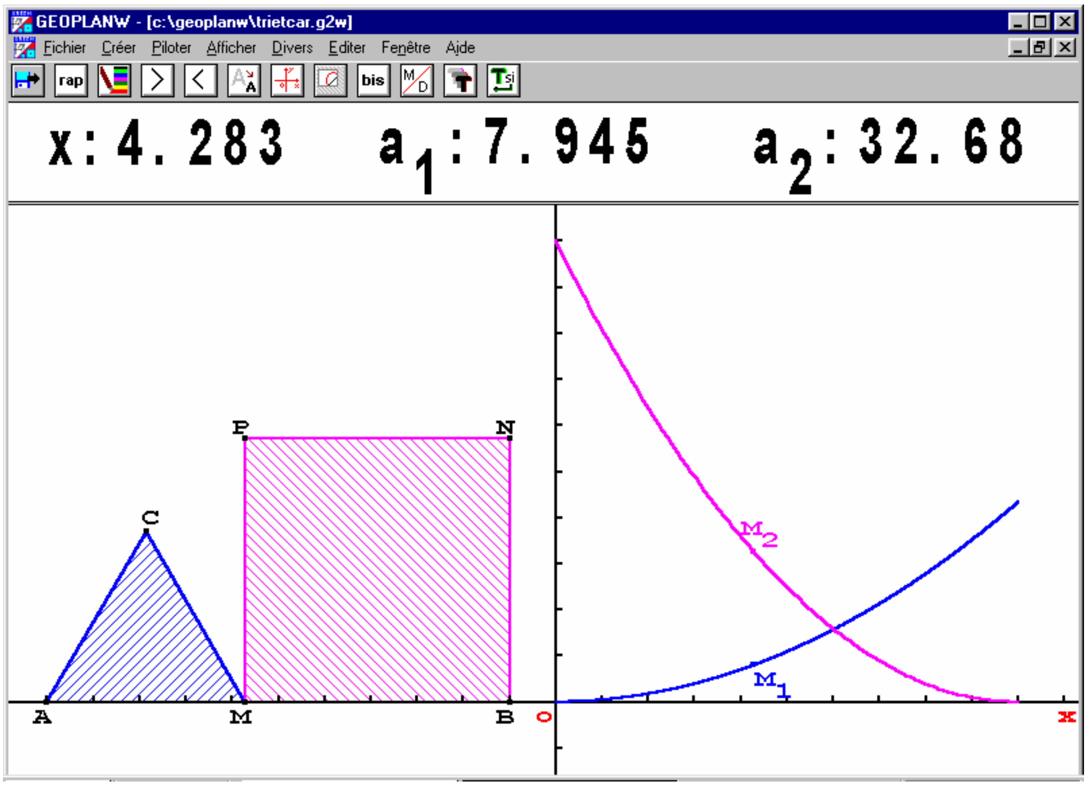
3° phase : expression des aires en fonction de x et vérification des résultats

Les élèves commencent par déterminer les expressions en fonction de x des aires du triangle et du carré. Ils peuvent ensuite vérifier la validité de leurs calculs à l'aide de GéoplanW en créant les deux courbes des fonctions a_1 et a_2 **qu'ils viennent de déterminer** et en vérifiant que les points M_1 et M_2 décrivent bien respectivement chacune de ces deux courbes lorsqu'ils font bouger M sur [AB].

c_1 courbe définie par $Y=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, X décrivant [0,10] (1000 points, repère r_1)

c_2 courbe définie par $Y=(10-X)^2$, X décrivant [0,10] (100 points, repère r_1)

C_{m2} (touche G) dessin en bloc de c_1, c_2



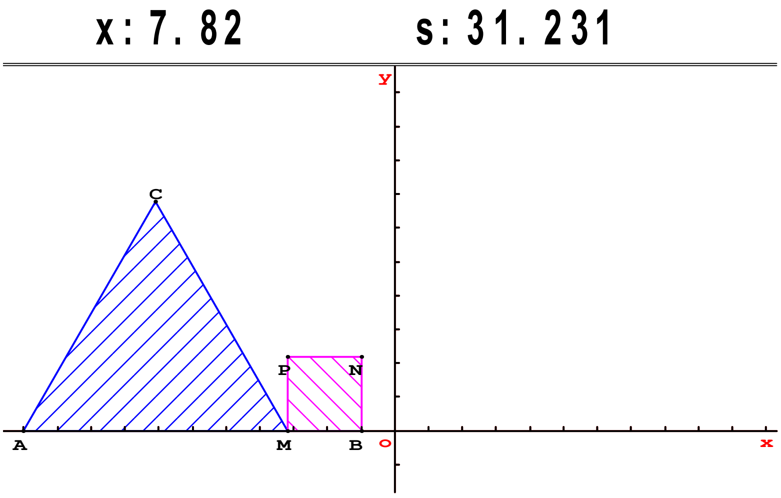
4° phase : étudier des variations de la somme $s(x)$ des aires du triangle et du carré en fonction de x ; recherche de la valeur de x pour laquelle cette aire est minimum

Ici on commencera par une réponse informatique – ou graphique – , dont on pourra se contenter en classe de seconde, mais on pourra demander à des élèves de première qui connaissent les dérivées de prouver les résultats.

On pourra débuter par une recherche empirique, les élèves observant le comportement de la valeur de $s(x)$ – affichée sur l'écran – lorsqu'ils font varier x, c'est-à-dire lorsqu'ils font bouger M sur $[AB]$. Ils noteront la valeur de x pour laquelle le minimum est atteint, ainsi que la valeur minimale de $s(x)$.
En général, cette manipulation leur permet d'apprécier l'aide qu'apporte l'utilisation d'un graphique pour effectuer la recherche.

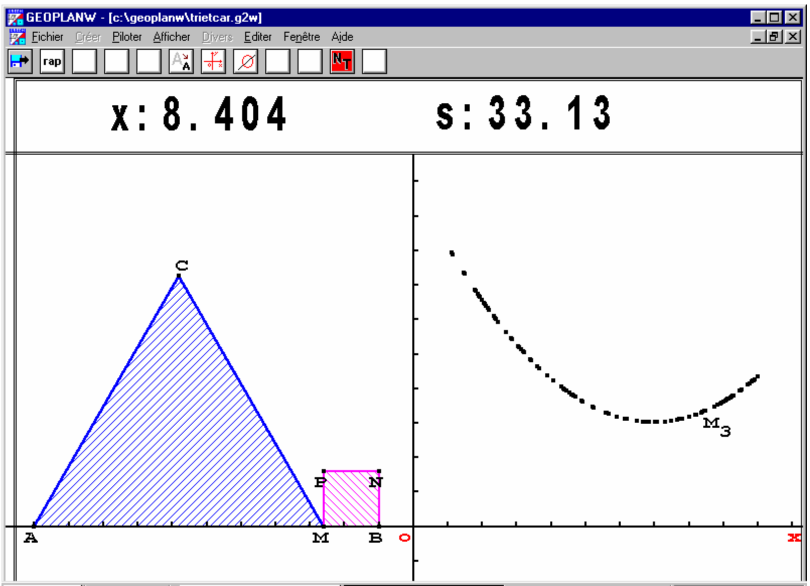
a) Recherche numérique

s = a_1+a_2
A$_{f0}$ affichage du scalaire **s** (3 décimales)



b) Recherche graphique « à la trace »

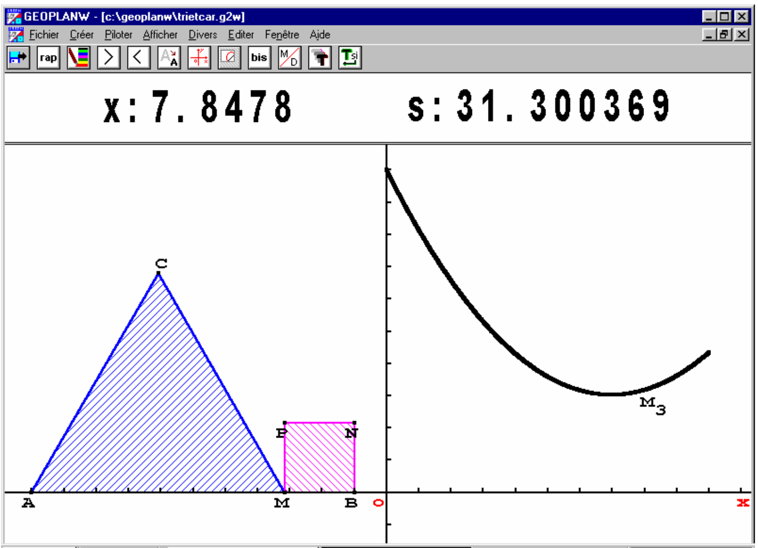
M$_3$ point de coordonnées (x,a_1+a_2) dans le repère **r**$_1$



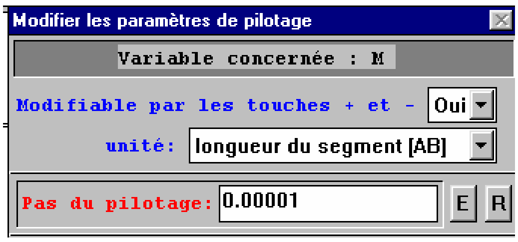
c) Recherche plus précise sur la courbe de la fonction s définie sur [0 ; 10] par $s(x) = a_1(x) + a_2(x)$

On obtient rapidement cette courbe avec les tâches : *Créer , Ligne , Courbe , Lieu d'un point*

S lieu du point **M**$_3$, pilote **M** (1000 points)



On effectue la recherche de x à 10^{-4} près en pilotant M au clavier.
Piloter, Piloter au clavier, puis sélectionner *M point libre sur le segment [AB]*
Piloter, Modifier paramètres de pilotage au clavier



5° phase : calculs pour justifier ou préciser certains résultats

En fonction du niveau de la classe, on peut maintenant proposer aux élèves des calculs à base de produits remarquables ou de dérivées pour justifier les résultats – et mieux encore pour en trouver les valeurs exactes –