# Du discret au continu

Texte proposé, dans le cadre du groupe académique « Lycée »,
par Jean-Raymond Delahaye - Lycée Alain Borne - Montélimar –
jeanray.delahaye@wanadoo.fr

## 1) Une première proposition d'introduction

**Le problème**

On fixe un entier naturel $n$.

On choisit aléatoirement deux nombres dans $\{0, 1/n, 2/n, ..., (n-1)/n\}$ et on en fait la somme $S$.
Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S$ ?
Que se passe-t-il si $n$ tend vers l'infini (ce qui revient à choisir deux nombres au hasard dans [0 ;1[) ?

**Le cas n = 5**

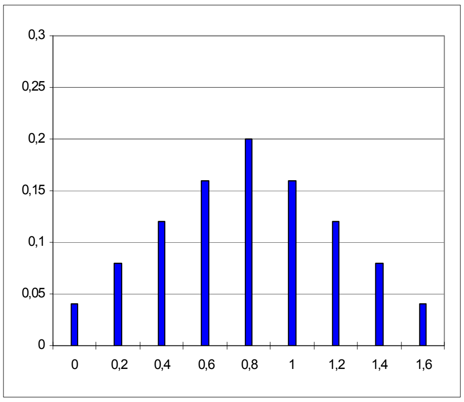
$$X \in \{ 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 \}$$
$$Y \in \{ 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 \}$$

$$S = X + Y$$

La loi de probabilité de $S$

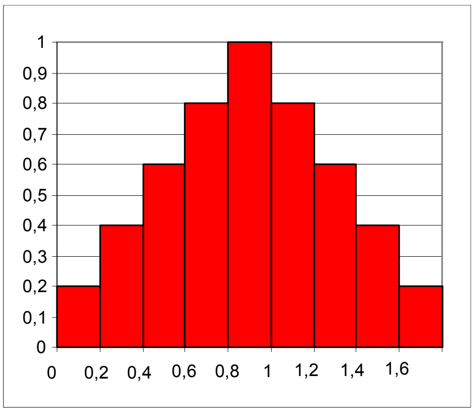
| $s_i$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/25 | 2/15 | 3/25 | 4/25 | 5/25 | 4/25 | 3/25 | 2/25 | 1/25 |

Diagramme des fréquences




Exemple
hauteur = p($S$ = 0,6) = 0,16

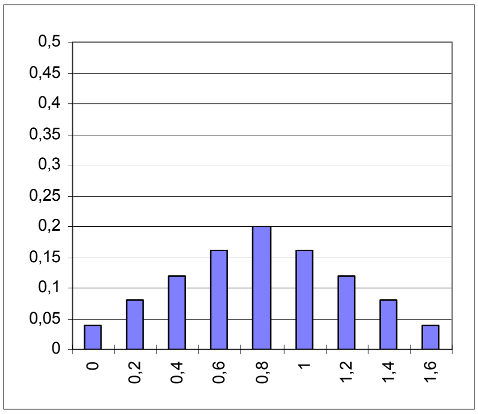
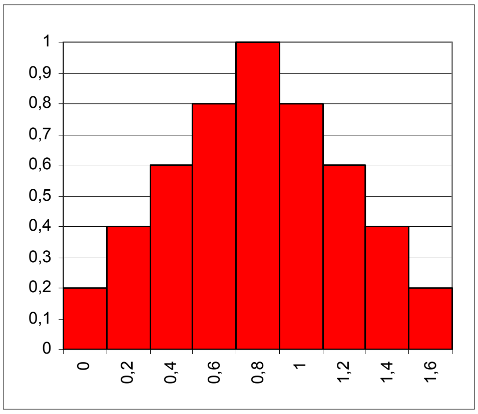
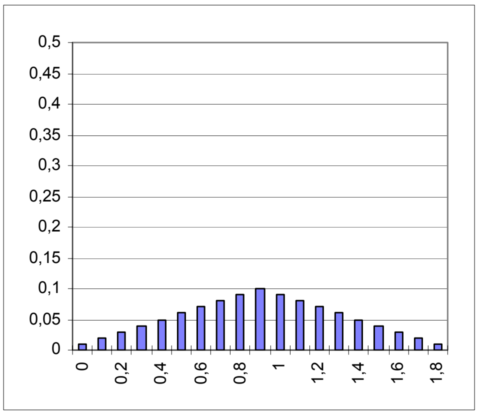
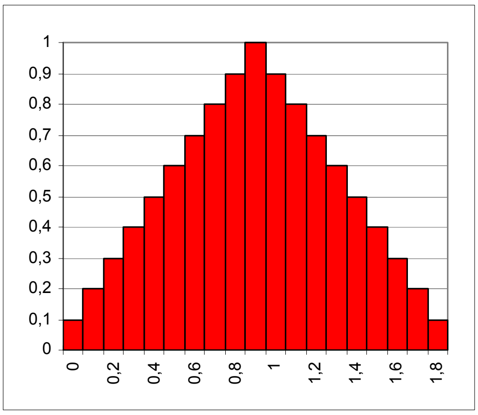
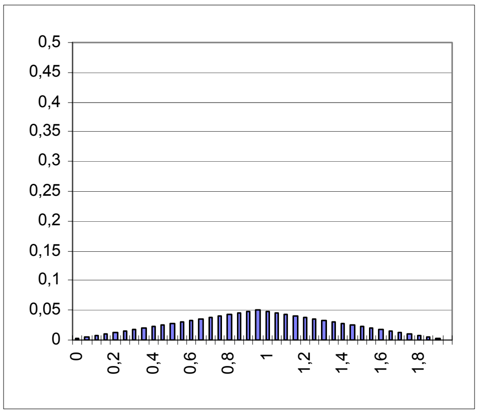
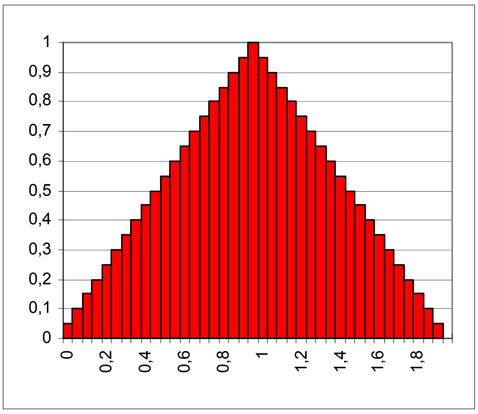
Histogramme




Exemple
aire = p($S$ = 0,6) = 0,16.
hauteur = 0,16/0,2 = 0,8

**On donne à *n* les valeurs 5, 10, 20 ...**

Pour *s* fixé, p(*S* = *s*) tend vers 0. C'est tout le problème !

| | **Loi de probabilité** | **Histogramme** |
|---|---|---|
| *n* = 5 |  |  |
| *n* = 10 |  |  |
| *n* = 20 |  |  |

Attention ! Dans chaque colonne, l'unité choisie sur l'axe des ordonnées est la même !

De plus, dans la première colonne, **la probabilité est la hauteur du rectangle** ; dans la seconde, **la probabilité est l'aire du rectangle.**

**Le passage au continu**

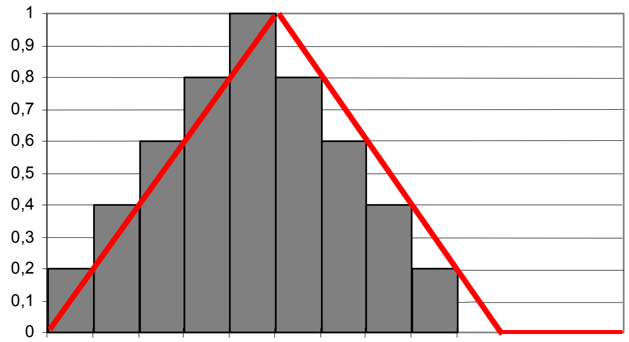
Si on veut passer à la limite, il faut s'appuyer sur l'histogramme.

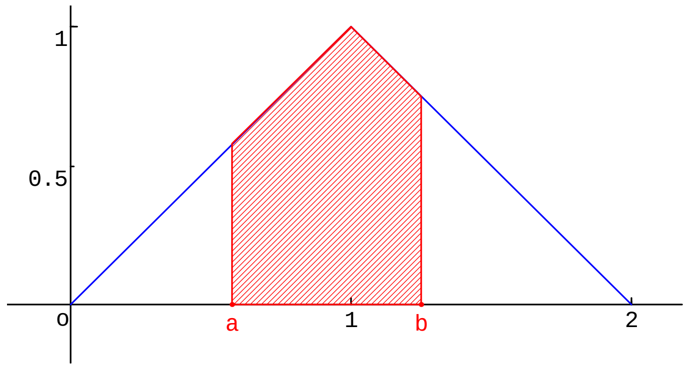
Soit $f$ la fonction définie dans $[0 ; +\infty[$ par

$f(x) = x$ si $x \in [0 ; 1[$,

$f(x) = 2-x$ si $x \in [1 ; 2[$,

$f(x) = 0$ si $x \in [2 ; +\infty [$.




On retrouve la méthode d'approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.

Soient $a$ et $b$ deux réels de $[0 ; 2[$ tels que $a < b$. L'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et la représentation graphique de $f$ est $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Cette intégrale est la limite quand $n$ tend vers l'infini de la somme des aires des rectangles concernés, c'est à dire de $\Sigma$ p($S = k/n$) avec $a \leq k/n < b$, soit p($a \leq S < b$).

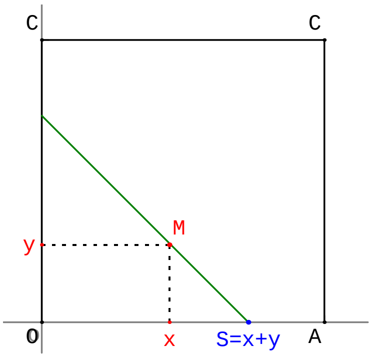
On posera p($a \leq S < b$) = $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et la fonction f sera appelée « fonction de densité de la loi de S ».

## 2) D'autres propositions pour introduire les lois continues

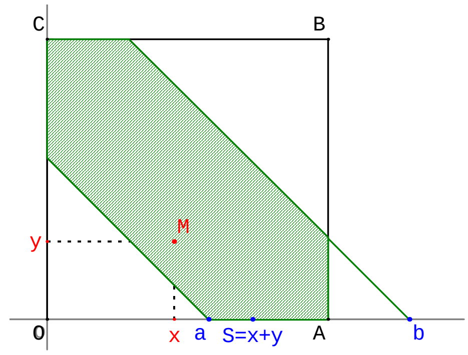
$X$ = nombre aléatoire dans [0 ; 1[.

$Y$ = nombre aléatoire dans [0 ; 1[.

On s'intéresse à la loi de $S = X + Y$.



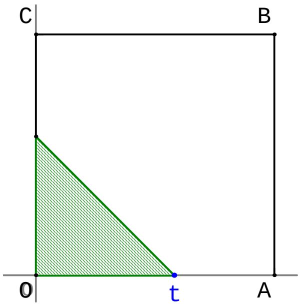

p($a < S < b$) = aire du domaine intérieur au carré unité limité par les droites d'équations $x + y = a$ et $x + y = b$.

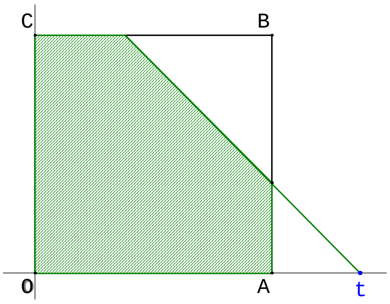



### Approche par calcul

On s'intéresse à la fonction $F$

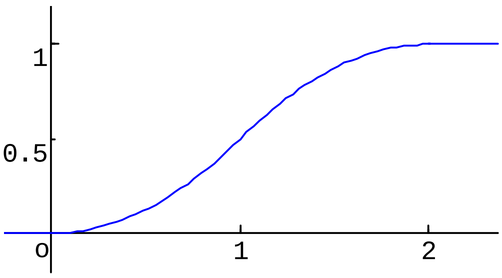
définie par $F(t) = p(S \leq t)$.



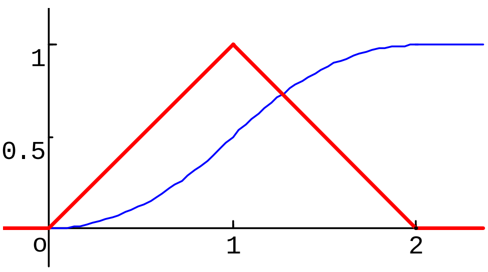




Si $0 \leq t < 1$, alors $F(t) = 0{,}5\, t^2$.

Si $1 \leq t$ , alors $F(t) = 1 - 0{,}5\,(2-t)^2$.




On dérive.




La fonction dérivée $F' = f$ est la fonction de densité.

### Approche géométrique

Il s'agit de démontrer que l'aire de la partie du carré située entre les droites d'équations $x+y = a$ et $x+y = b$ est égale à l'aire sous le triangle entre $a$ et $b$.

- Dans le cas où $a = 0$ et $b \leq 1$, la justification est immédiate (figure 1).
- Dans les autres situations, on peut déduire la propriété du résultat précédent ; en effet, l'aire concernée est alors égale à l'aire du carré à laquelle on soustrait celles d'un ou deux triangles (figure 2).

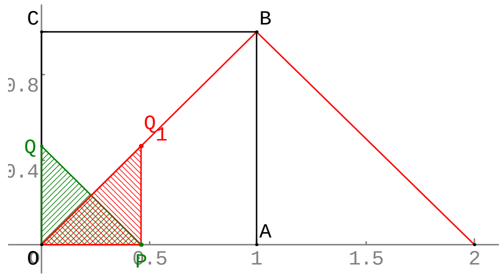



Figure 1

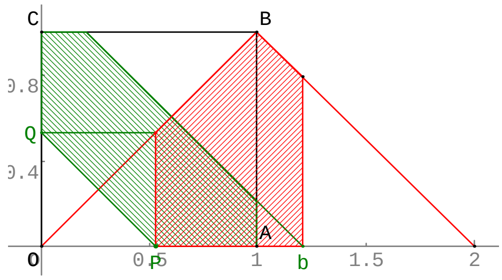



Figure 2

p($a \leq S < b$) est l' aire sous la courbe.

$$p(a \leq S < b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

$f$ est la fonction de densité.