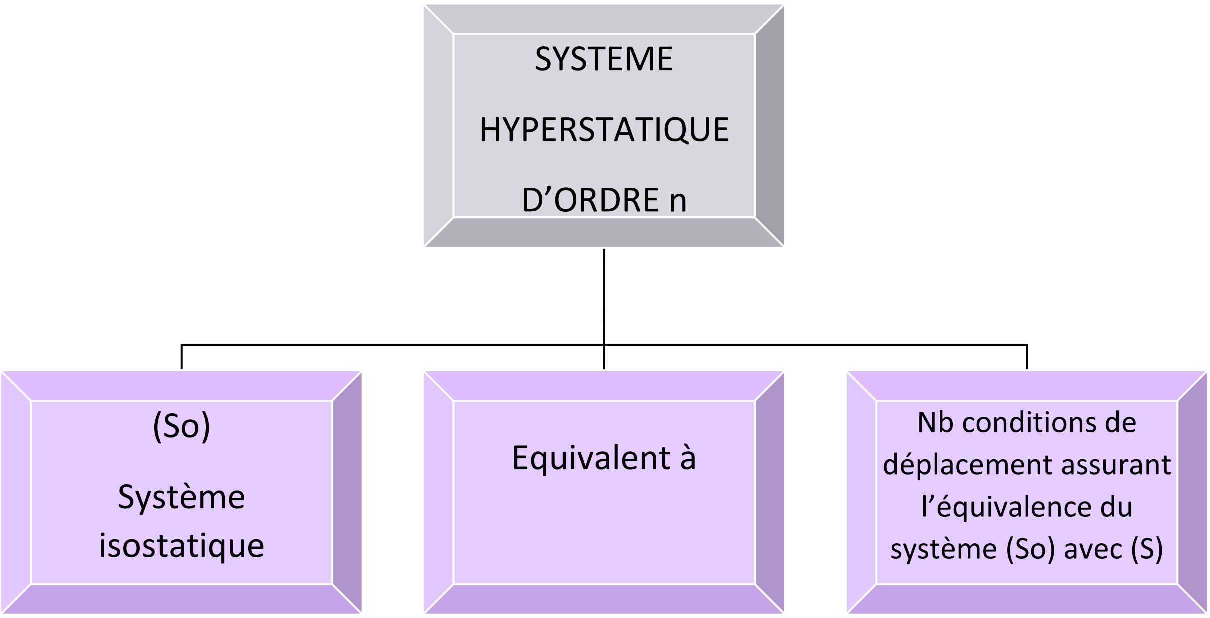
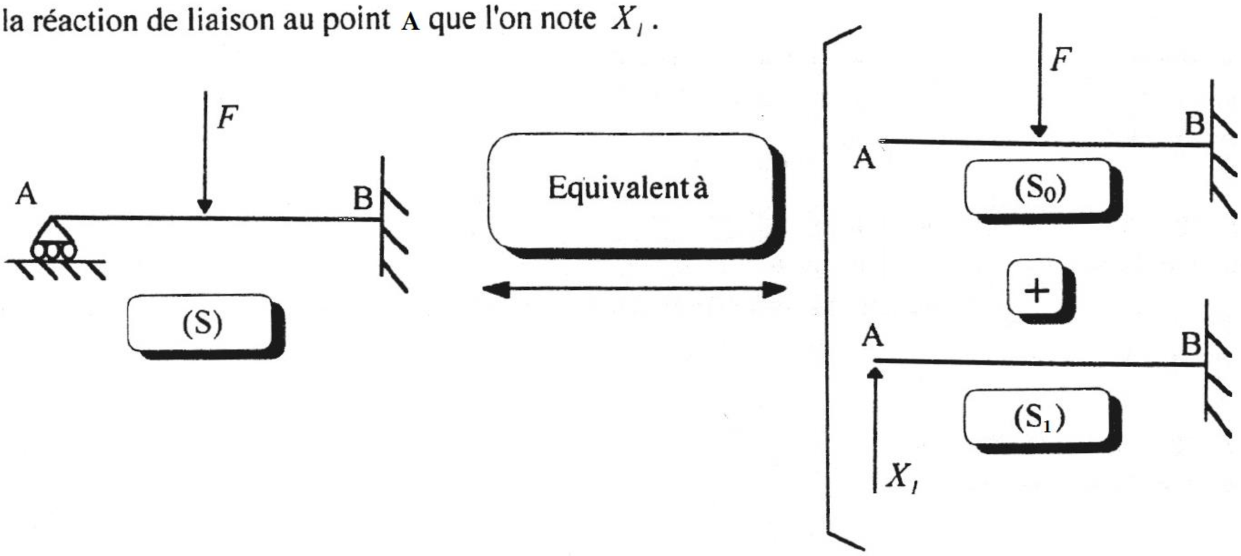
Méthodes des forces
Application du principe des travaux virtuels

Pour résoudre un système hyperstatique d'ordre n, il faut établir n équations supplémentaires.



- la réaction de liaison au point A que l'on note X_1.

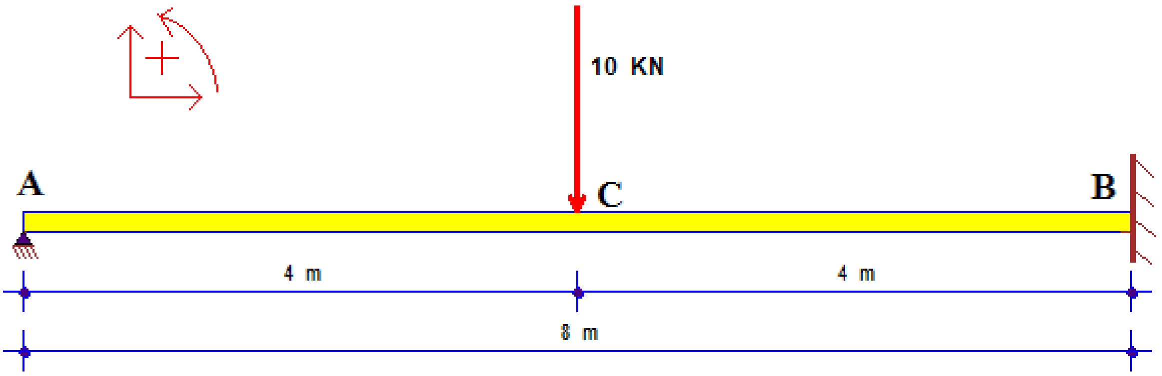


Exemple: pour notre cas on aura : $(\delta o \times \delta 1) - (\delta X_1 \times \delta 1) = 0$

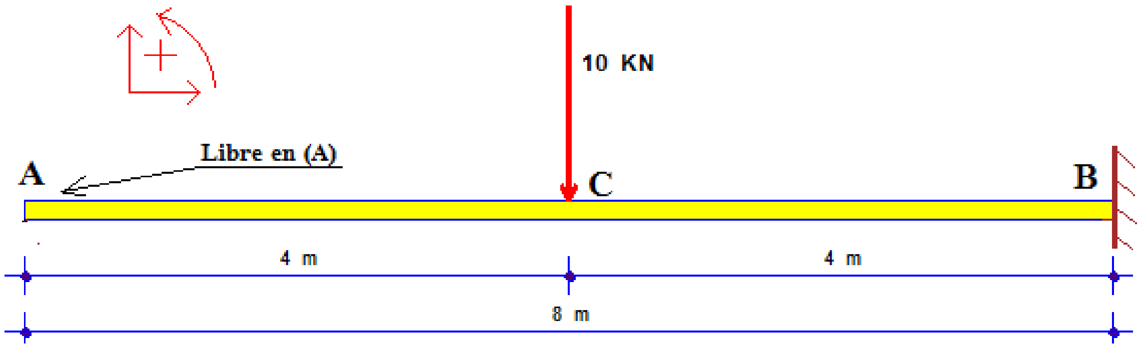
En plus simplifié le déplacement au point A dû à (S0) - déplacement (S1) est nul.

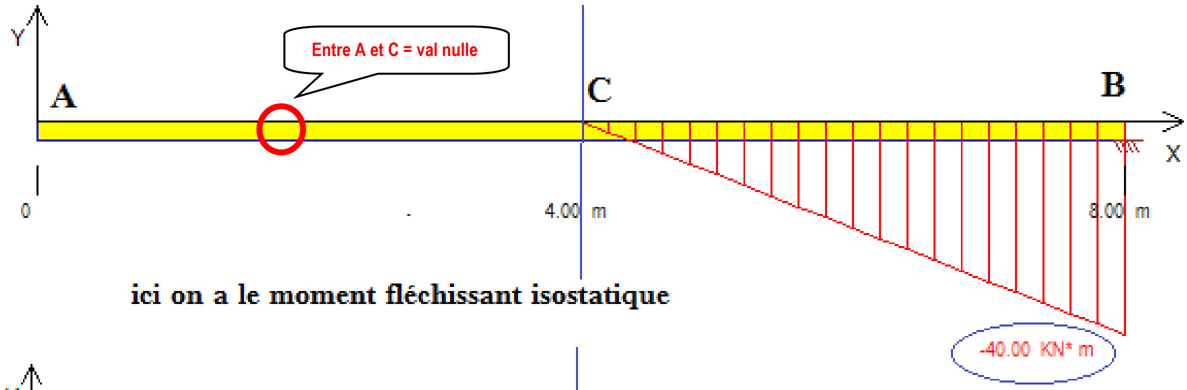
Exemple: de notre poutre: avec F= 10 kN et L = 8m (hypothèse EI = constante = 1)

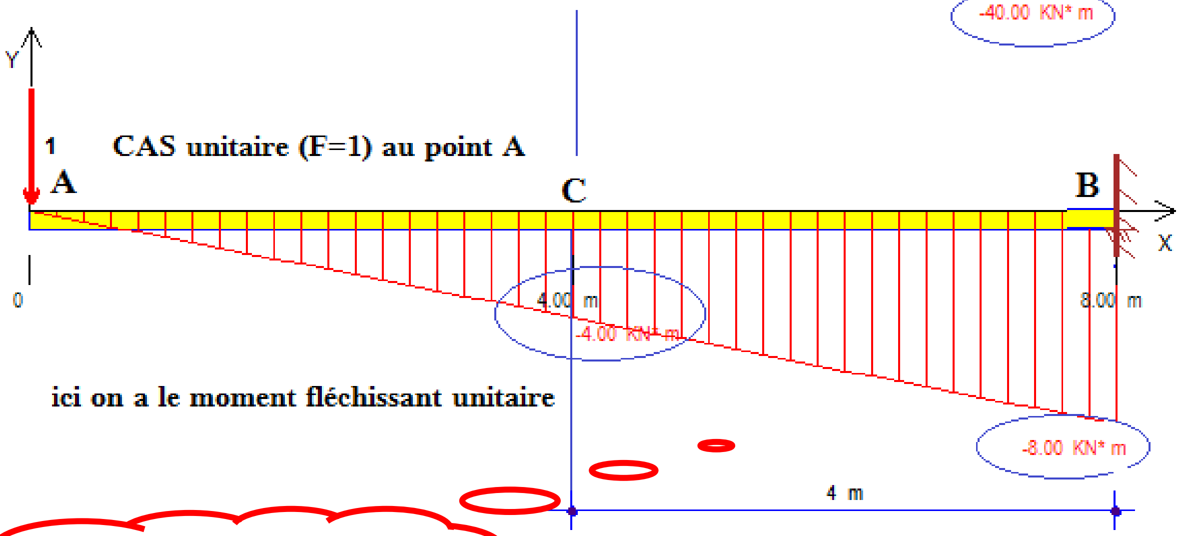
Le système est hyperstatique de deg: 1



1er Cas on supprime l'appui au point A cela devient isostatique :



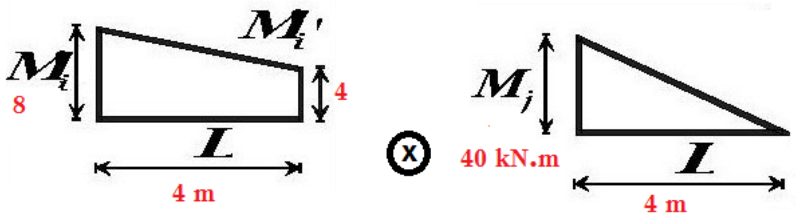




Attention ici L = ℓ/2 (4m)

A l'aide des intégrales de MOHR on retrouve les équations ci-dessous.

(Nota le sens de chaque diagrammes restent cohérent la multiplication est symétrique)***



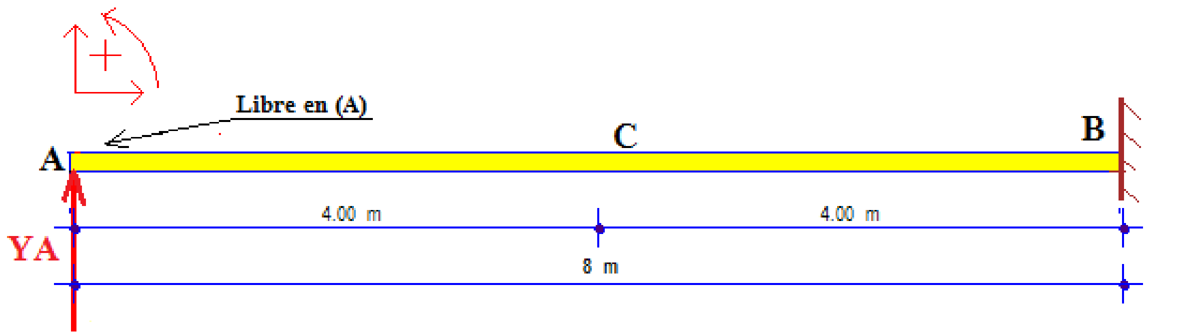
$$\otimes \quad = \frac{1}{6} L M_j (2M_i + M'_i)$$

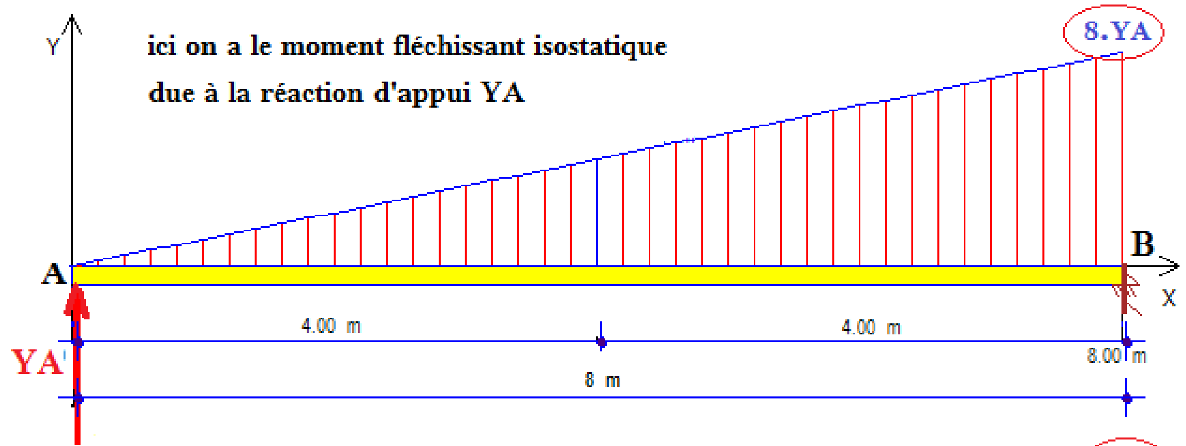
$$\textit{Cas général avec une Force F} \Rightarrow fA_0 = \frac{1}{6EI} \times (\frac{L}{2}) \times \frac{-FL}{2} \times \left[(2L) + \frac{L}{2} \right] = -\frac{5FL^3}{48EI}$$

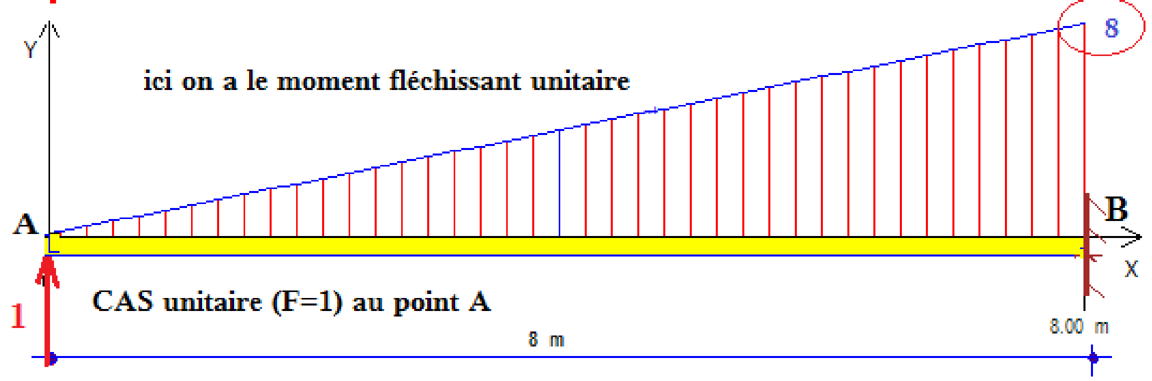
$$fA_0 = \frac{1}{6EI} \times (4.00\,m) \times (-40\,kN.m) \times ((2\times 8)+4) = \frac{-160\times 20}{6EI} = \frac{-1600}{3EI} (avec\, EI = 1)$$

Donc la flèche vers le bas vaut $fA_0 = -\frac{1600}{3} = -533{,}333$ avec (EI = 1)

2e Cas: On supprime l'appui au point A et on place une Force virtuelle YA :

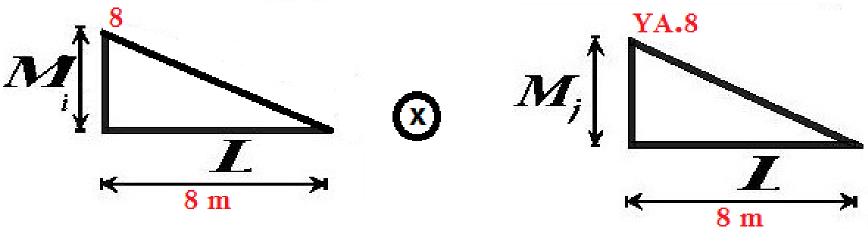






A l'aide des intégrales de MOHR on retrouve les équations ci-dessous.

(Nota le sens de chaque diagrammes restent cohérent la multiplication est symétrique)***



$$= \frac{1}{3} L M_i M_j$$

$$Cas\ général\ avec\ une\ Force\ F \Rightarrow fA_1 = \frac{1}{3EI} \times (L) \times L \times (F \times L) = \frac{F \times L^3}{3EI} (avec\ F = YA)$$

$$fA_1 = \frac{1}{3EI} \times (8.00\,m) \times 8 \times (8 \times YA) = \frac{YA \times 8^3}{3EI} = \frac{512 \times YA}{3EI} = 170.66 \times YA\,(avec\ EI = 1)$$

Donc la flèche vers le haut vaut $+\frac{512 \times YA}{3} = +170{,}666 \times YA$ avec (EI = 1)

En résumé :
On sait que la flèche est nulle au point A.

$$Cas\ général\ Donc\quad fA_1 - fA_0 = 0\quad soit \Rightarrow \frac{L^3 \times YA}{3} - \frac{5FL^3}{48} = 0 \Rightarrow \boxed{soit\ YA = \frac{15F}{48} = \frac{5F}{16}}$$

$$Donc\quad fA_1 - fA_0 = 0\quad soit \Rightarrow \frac{512 \times YA}{3} - \frac{1600}{3} = 0\qquad Soit \Rightarrow \boxed{YA = \frac{1600}{512} = 3.125\,kN}$$

On trouve les actions d'appuis après un PFS:

$$\boxed{soit\ YB = \frac{11F}{16}}$$

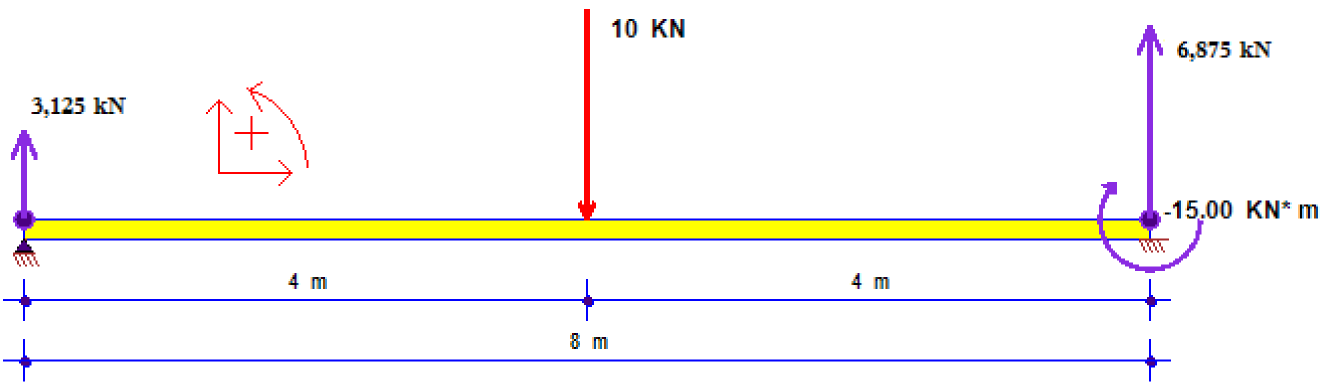
$$\sum y = YA + YB - F = 0 \Rightarrow 3{,}125 + YB - 10kN = 0\quad soit\ \boxed{YB = 6{,}875\,kN}$$

$$\boxed{soit\ MB = \frac{-9FL}{48} = \frac{-3FL}{16}}$$

$$\sum Mz/A = +YB \times L - F \times \frac{L}{2} + MB = 0 \Rightarrow \frac{33F \times L}{48} - \frac{FL}{2} + MB = 0$$

$$\sum Mz/A = +YB \times L - F \times \frac{L}{2} + MB = 0 \Rightarrow 6{,}875x8m - 10kNx4m + MB = 0\quad soit\ \boxed{MB = -15\,kN.m}$$

<u>Résultats des réactions d'appuis</u>



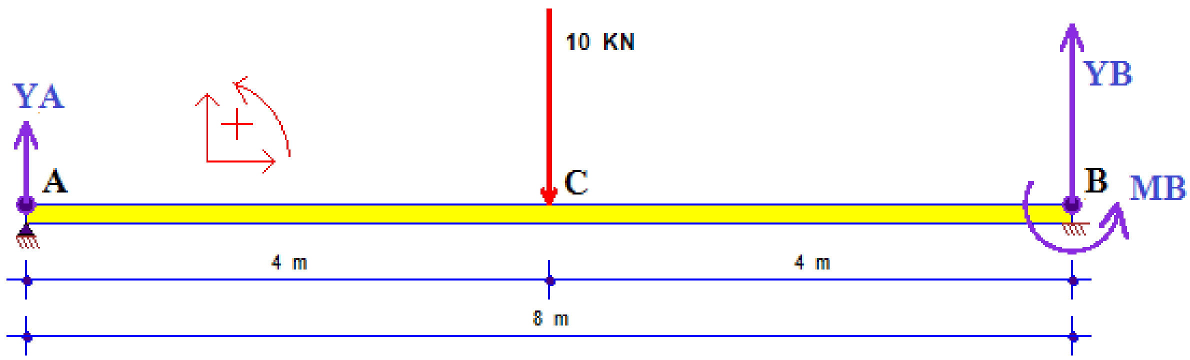
AUTRE MOYEN DE RESOLUTION

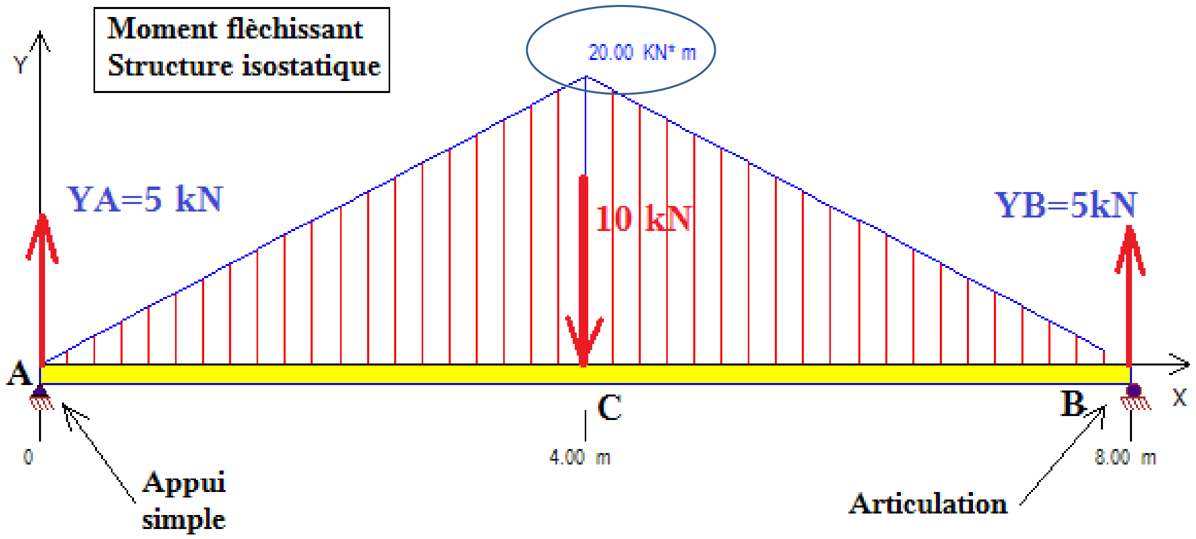
Nous allons utiliser un autre moyen de calcul:

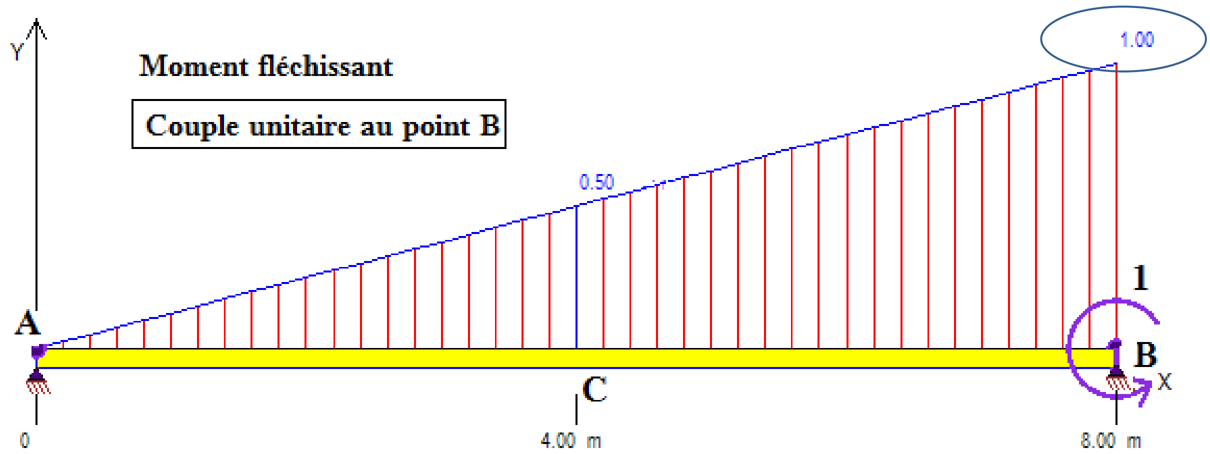
Pour l'exemple précédent on avait placé une force virtuelle YA avec une hypothèse de déplacement nul au point A.

Nous allons vérifier avec une inconnue **MB** et une hypothèse de **rotation nulle au point B.**

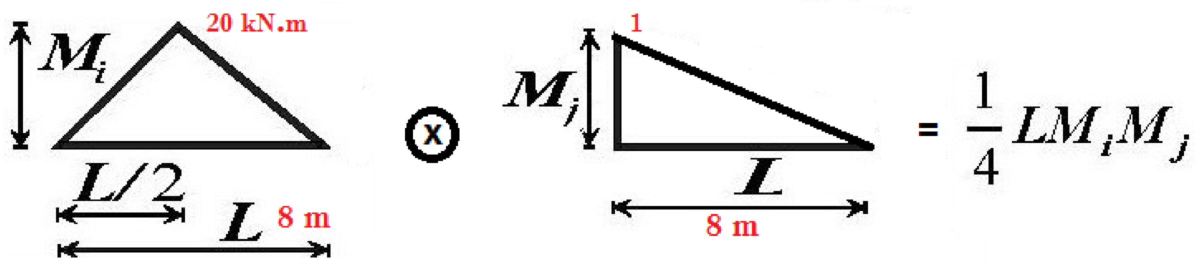
Exemple de résolution:







1er : On calcule la rotation ω_{01} au point B pour le cas isostatique avec un couple unitaire.



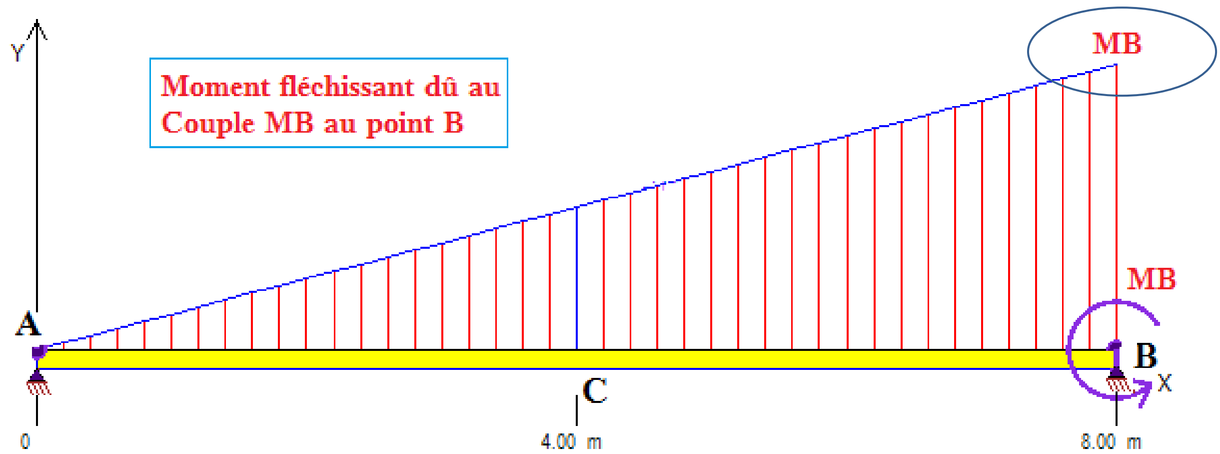
Mi= Moment fléchissant du à une force ponctuelle centrée = FL/4

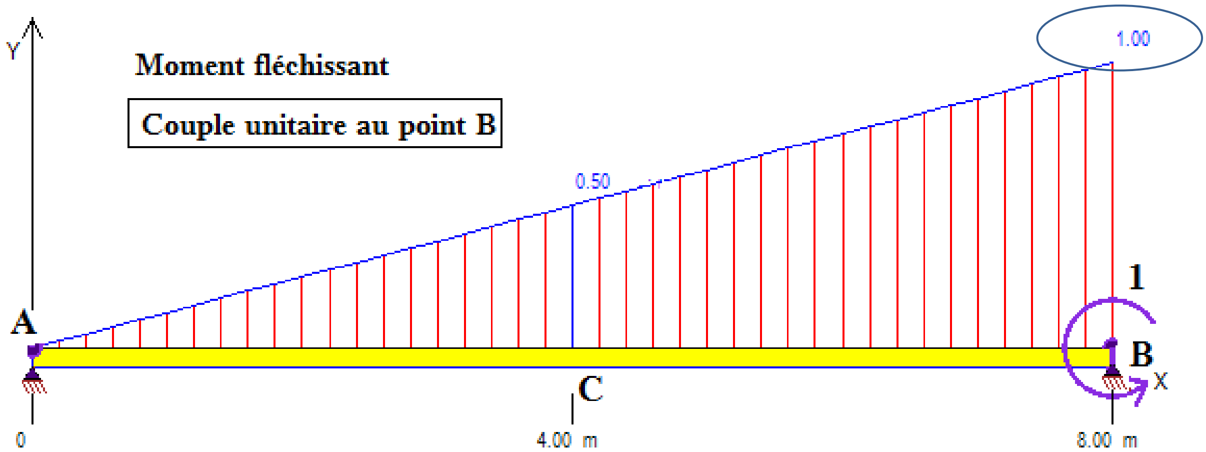
Mj= Moment fléchissant du à un couple unitaire en B
Mj= 1

$$\omega Bo_1 = \frac{1}{4EI} \times (L) \times \frac{F \times L}{4} \times (1) = \boxed{\frac{F \times L^2}{16EI} (\textit{Valeur à retenir pour la suite....})}$$

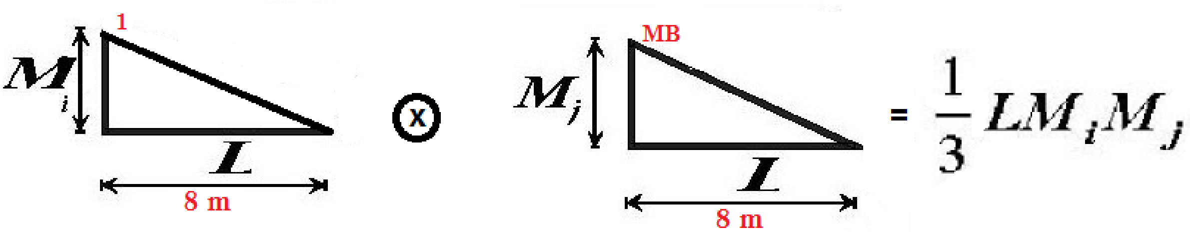
$$\omega Bo_1 = \frac{10\,kN \times (8^2)}{16EI} = \frac{640}{16EI} = \frac{40}{EI} = 40 \ \ (avec\, EI = 1)$$

2e Cas: On supprime l'encastrement au point B et on place un moment virtuel MB:





2e On calcule la rotation ω_{11} au point B avec un couple unitaire MB et un coupe unitaire = 1



$$\omega B_{11} = \frac{1}{3EI} \times (8.00\,m) \times MB \times (1) = \boxed{\frac{MB \times 8}{3EI} = 2.66 \times MB \ \ (avec\, EI = 1)}$$

$$Donc \ \ \omega B_{01} - \omega B_{11} = 0 \quad soit \Rightarrow 40 + \frac{8MB}{3} = 0$$

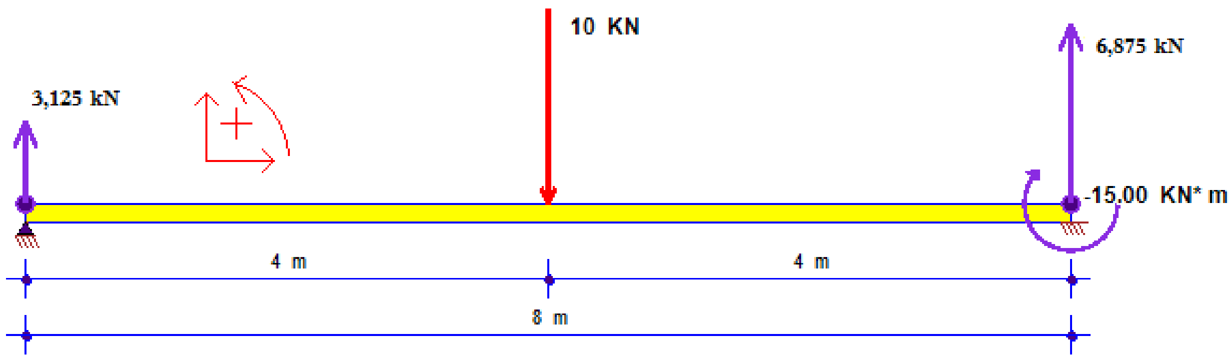
$$Soit \Rightarrow \boxed{MB = \frac{-3 \times 40}{8}} = \boxed{-15\,kN.m}$$

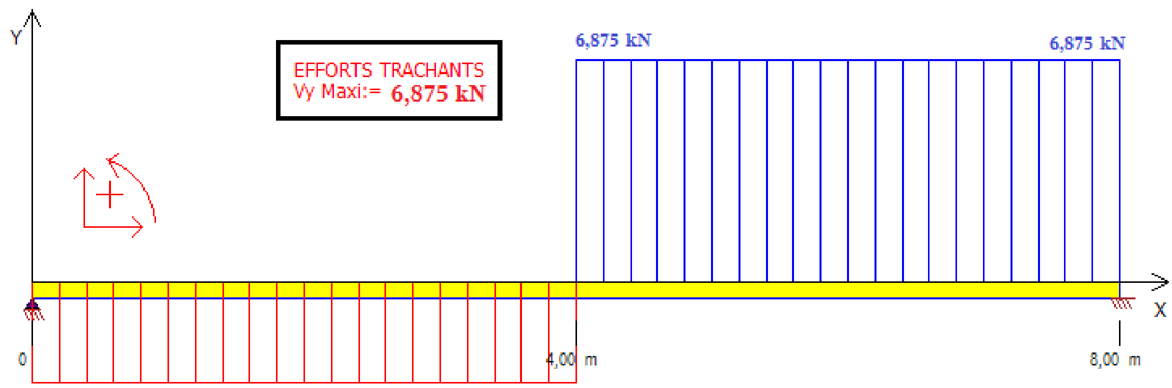
On trouve les actions d'appuis après un PFS:

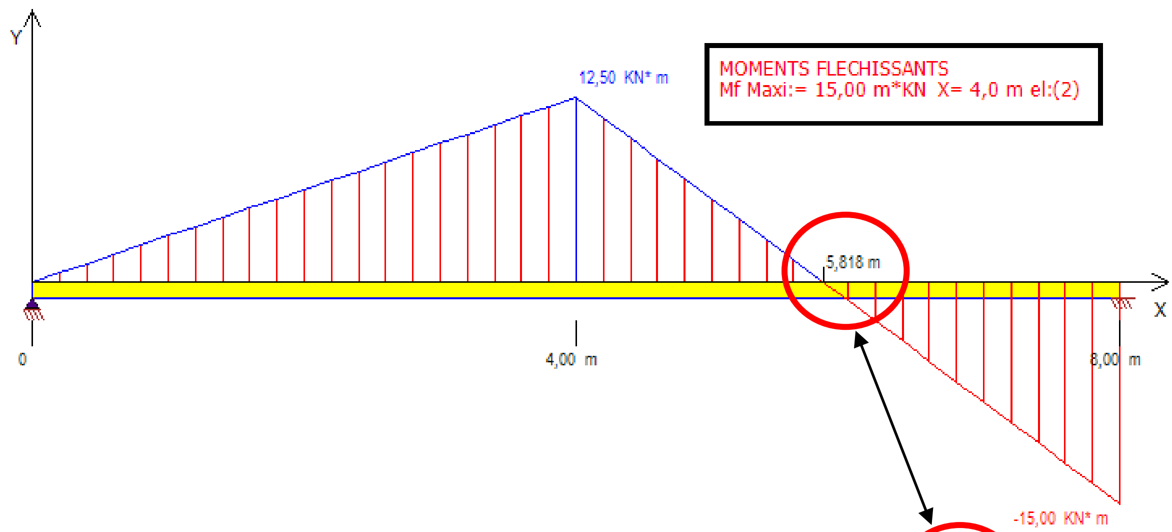
$$\sum Mz / A = +YB \times L - F \times \frac{L}{2} + MB = 0 \Rightarrow YBx8m - 10kNx4m - 15\,kN.m = 0 \ \ \boxed{soit \ YB = 6{,}875}$$

$$\sum y = YA + YB - F = 0 \Rightarrow YA + 6{,}875 - 10kN = 0 \quad soit\ \boxed{YA = 3{,}125\,kN}$$

Résultats des diagrammes de sollicitations :







$$\Rightarrow Mf(x) = YB.x - MB = 0 \quad soit \ x = \frac{MB}{YB} = \frac{15}{6.875} = 2{,}1818\, soit\ 8m - 2.1818 = 5{,}818m$$