

Rappels cours de 1ère

1. FORCE :

elle est modélisée par un vecteur et un point d'application.



1.1. CARACTERISTIQUES

- point d'application : A

Vecteur :

- direction

- sens : de A vers B

- module ou intensité = norme du vecteur:

la longueur du segment [AB] à une échelle de force

Remarque : le point d'application et la direction définissent la **droite support** (Δ) de la force.

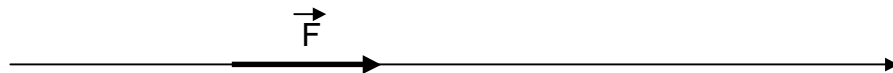
Unité : unité légale, le **Newton**, symbole : **N**

notations : \vec{F} $\vec{F}_{1/2}$ pour la force transmise par le solide 1 sur le solide 2

module $\|\vec{F}\| = F$ $\|\vec{F}_{1/2}\| = F_{1/2}$

1.2. PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN SCALAIRE K (NOMBRE ALGEBRIQUE)

c'est un vecteur colinéaire au vecteur \vec{F} $\vec{U} = k \cdot \vec{F}$



si $k > 0$

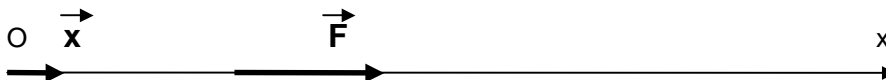
même sens

si $k < 0$

sens contraires

1.3. PRODUIT SCALAIRE D'UN VECTEUR ET DU VECTEUR UNITAIRE D'UN AXE

le résultat est une mesure algébrique (ordonnée)

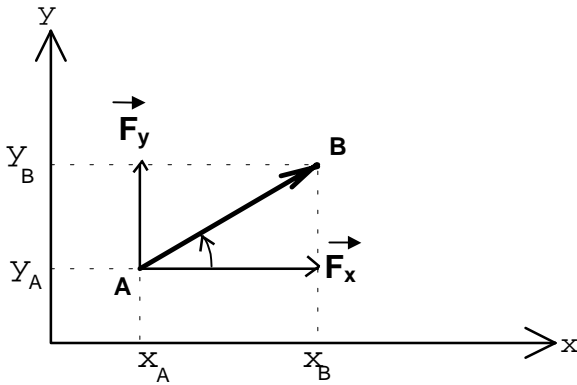


$$\vec{x} \cdot \vec{F} = F_x$$

1.4. COMPOSANTES D'UN VECTEUR SUR UN SYSTEME D'AXES

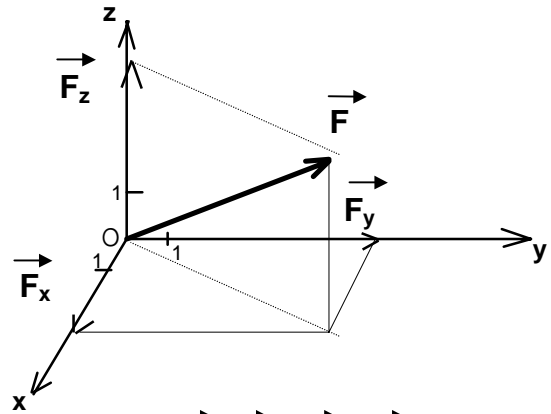
ce sont des **vecteurs** dont les directions sont parallèles aux axes

dans le plan



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

en 3 D



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

1.5. COORDONNEES D'UN VECTEUR DANS UN REPERE ORTHONORME :

ce sont les **mesures algébriques** des composantes du vecteur mesurées sur les axes du repère

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$$

$$F_x = \|\vec{F}\| \cdot \cos(\overline{Ox}, \vec{F}) = F \cos \alpha$$

$$F_y = \|\vec{F}\| \cdot \sin(\overline{Ox}, \vec{F}) = F \sin \alpha$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

F_x et F_y s'appellent les **coordonnées du vecteur \vec{F}** sur les axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})

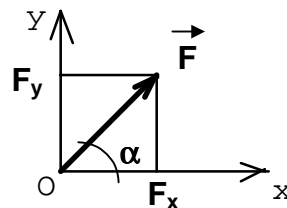
1.6. INTENSITE OU MODULE D'UNE FORCE ET DIRECTION

soit $\vec{F} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ **la norme** $\|\vec{F}\| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ (ou $\|\vec{F}\| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$)

la direction

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|F_y|}{|F_x|}$$

α = angle aigu



les signes des coordonnées F_x et F_y renseignent sur le sens

2. MOMENT D'UNE FORCE \vec{F} PAR RAPPORT A UN POINT :

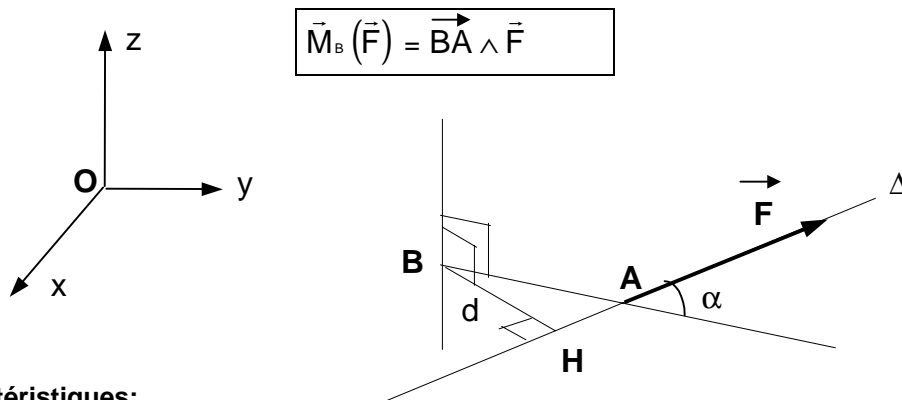
2.1. VECTEUR MOMENT

soient :

* le repère orthonormé $\mathcal{R} (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ direct

* la force $\vec{F} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ appliquée au point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et le point $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$

le **moment vectoriel de la force \vec{F}** d'origine **A**, par rapport au point **B**, est le vecteur défini par la relation :



caractéristiques:

$\vec{M}_B(\vec{F})$

- il est perpendiculaire au plan $[B, (\Delta)]$

- son sens est tel que le trièdre $(\vec{BA}, \vec{F}, \vec{M}_B(\vec{F}))$ soit direct.

- sa norme $\|\vec{M}_B(\vec{F})\| = M_B(\vec{F}) = |\vec{BA} \cdot \vec{F}| \sin(\vec{BA}, \vec{F})$

$BA \cdot |\sin(\vec{BA}, \vec{F})| = BH = d$ bras de levier

$$M_B(\vec{F}) = F \cdot d$$

$\vec{M}_B(\vec{F})$ est le même quelle que soit la position de **A** sur le support (Δ)

coordonnées : $\vec{M}_B(\vec{F}) = \begin{pmatrix} M_{Bx} \\ M_{By} \\ M_{Bz} \end{pmatrix}$

unités : $M_B(\vec{F})$ en **N.m** ou **m.N**

cas de nullité : la ligne d'action (ou support) de \vec{F} passe par le centre de moment

2.2. MOMENT ALGEBRIQUE DANS UN PLAN

soient :

* le plan défini par le repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(\mathbf{O}, \bar{x}, \bar{y},)$

- la force $\vec{F} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ appliquée au point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ le point $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

$$\bar{M}_B(\vec{F}) = \pm F \cdot d$$

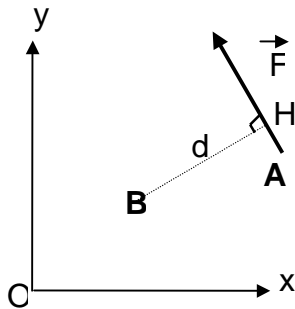
signe + si la rotation donnée à BH par \vec{F} autour de B se fait dans le sens trigonométrique
signe - dans le cas contraire

le moment vectoriel correspondant s'écrit :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Bz} \end{pmatrix}$$

la valeur du moment algébrique est égale à la

coordonnée de $\vec{M}_B(\vec{F})$ sur l'axe (\mathbf{O}, \bar{z}) : $\bar{M}_B(\vec{F}) = M_{Bz}$



2.3. RELATION FONDAMENTALE DE CHANGEMENT DE CENTRE DE MOMENT

Dans le repère orthonormé, $\mathfrak{R}(\mathbf{O}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Soit \vec{F} la force appliquée en M et 2 points A et B quelconques.

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

3. TORSEUR REDUIT EN UN POINT P, ASSOCIE A UNE ACTION MECANIQUE :

3.1. TORSEUR ASSOCIE A UNE FORCE \vec{F} :

C'est une entité mathématique définie par rapport au point P, constituée de 2 vecteurs :

vecteur associé à la force \vec{F}

moment vectoriel de la force \vec{F} au point P

$$[\mathfrak{t}(\vec{F})]_P = [\vec{F}; \vec{M}_P(\vec{F})]_P = \left[\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} M_{Px} \\ M_{Py} \\ M_{Pz} \end{pmatrix} \right]_P$$

3.2. TORSEUR ASSOCIE A UN COUPLE \vec{C} :

$$[\mathfrak{t}(\vec{C})]_P = [\vec{0}; \vec{C}]_P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \right]_P$$

Ce torseur est **invariant** quelque soit le point P de réduction choisi

3.3. TORSEUR NUL

C'est le torseur dont les coordonnées des 2 vecteurs sont toutes nulles

$$[0]_P = [\vec{0}; \vec{0}]_P = \left[\begin{array}{c} (0) \\ (0) \\ (0) \end{array} ; \begin{array}{c} (0) \\ (0) \\ (0) \end{array} \right]_P \text{ ce torseur est } \mathbf{invariant} \text{ quelque soit } P$$

3.4. TORSEUR RESULTANT

Soit un solide soumis à l'action de plusieurs forces et de couples.

L'action mécanique globale de ces efforts peut être réduite en un point donné par un torseur unique nommé **torseur résultant**.

Exemple : soit un solide soumis à 2 forces : \vec{F}_1 et \vec{F}_2

Le torseur résultant est la somme des deux torseurs associés à chacune des deux forces.

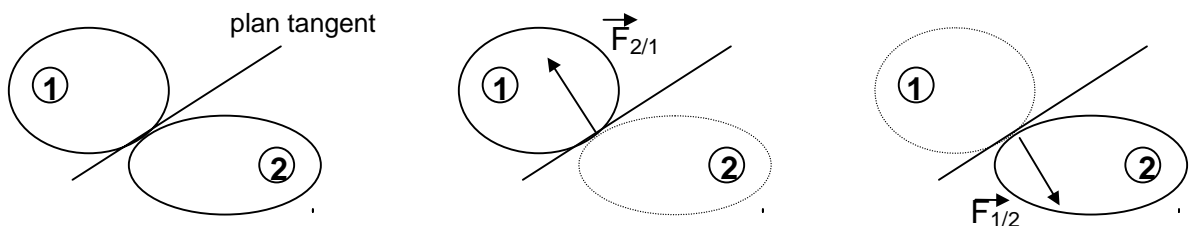
Notation : $\vec{M}_{P1} = \vec{M}_P(\vec{F}_1)$ et $\vec{M}_{P2} = \vec{M}_P(\vec{F}_2)$

$$[t(\vec{F}_1, \vec{F}_2)]_P = \left[\begin{array}{c} (F_{1x}) \\ (F_{1y}) \\ (F_{1z}) \end{array} ; \begin{array}{c} (M_{P1x}) \\ (M_{P1y}) \\ (M_{P1z}) \end{array} \right]_P + \left[\begin{array}{c} (F_{2x}) \\ (F_{2y}) \\ (F_{2z}) \end{array} ; \begin{array}{c} (M_{P2x}) \\ (M_{P2y}) \\ (M_{P2z}) \end{array} \right]_P = \left[\begin{array}{c} (F_{1x} + F_{2x}) \\ (F_{1y} + F_{2y}) \\ (F_{1z} + F_{2z}) \end{array} ; \begin{array}{c} (M_{P1x} + M_{P2x}) \\ (M_{P1y} + M_{P2y}) \\ (M_{P1z} + M_{P2z}) \end{array} \right]_P$$

4. PRINCIPE DES ACTIONS RECIPROQUES (OU MUTUELLES) :

Soient 2 solides en contact :

$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$$



5. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

5.1. SOUS FORME DE TORSEUR

Un solide est en équilibre si et seulement si

le torseur résultant par rapport à un point quelconque P de toutes les actions mécaniques appliquées sur le solide isolé est égal au torseur nul.

$$\sum [t]_P = [0]$$

5.2. SOUS FORME VECTORIELLE

Un solide est en équilibre si et seulement si :

la somme des vecteurs forces de toutes les actions mécaniques appliquées sur le solide isolé est nulle,

et

la somme des vecteurs moments par rapport a un point P quelconque de toutes les actions mécaniques appliquées sur le solide isolé est nulle.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M}_P = \vec{0}$$

5.3. SOUS FORME SCALAIRE

Pour un problème appartenant au plan (O,x,y), un solide est en équilibre si et seulement si:

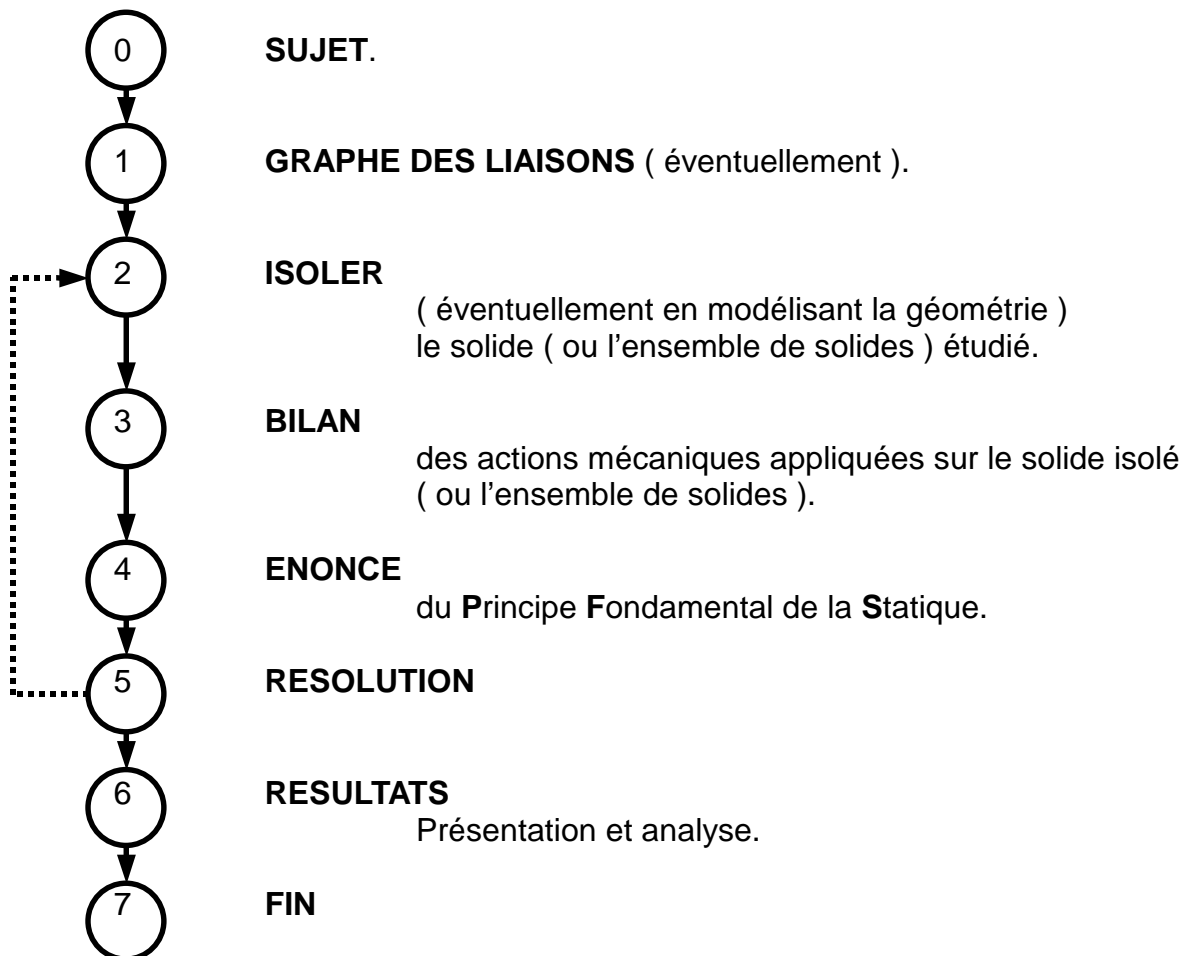
la somme des coordonnées suivant x des forces est égale à zéro, **et**

la somme des coordonnées suivant y des forces est égale à zéro, **et**

la somme des coordonnées suivant z des moments par rapport au point P est égale à zéro.

$$\sum F_x = 0 \quad \text{et} \quad \sum F_y = 0 \quad \text{et} \quad \sum M_{Pz} = 0$$

6. METHODE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE

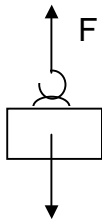


7. CAS PARTICULIER DU SOLIDE SOUMIS A 2 FORCES

Un solide soumis a 2 forces est en équilibre si et seulement si les 2 forces ont :

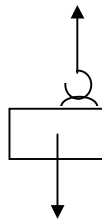
même intensité, **et**
même direction, **et**
sens opposé, **et**
même ligne d'action.

exemple 1 :



Sachant que l'action du crochet sur l'anneau de levage est une force verticale dirigée vers le haut et d'intensité $F=10$ kN, déterminer la masse du solide.
On supposera le poids appliqué au centre du solide.

Exemple 2 :



Dans ce cas, la ligne d'action de la force exercée par le crochet sur l'anneau de levage ne pourra jamais être la même que celle du poids.
Le solide ne peut donc pas être en équilibre.

8. CAS PARTICULIER DU SOLIDE SOUMIS A 3 FORCES NON TOUTES PARALLELES

Un solide soumis a 3 forces non toutes parallèles est en équilibre si et seulement si :

la somme des 3 forces est nulle, **et**
les lignes d'action des 3 forces sont concourantes en un même point.

