Chapitre 7 : Produit scalaire de deux vecteurs du plan

I) Produit scalaire de deux vecteurs

a) Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ égal à :

- **0 si l'un des vecteurs est nul**
- **$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$**

Remarques :

- Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si ils ont le même sens et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si ils sont de sens contraires.
- Le signe du produit scalaire de deux vecteurs non nuls est celui du cosinus de leur angle, il est donc positif lorsque l'angle est aigu et négatif lorsque l'angle est obtus.

Ex 2 p 252

Propriété : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

On dit que le produit scalaire est symétrique.

b) Propriétés de calcul

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs et k un nbre réel, alors on a :

- **$\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$**
- **$\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\,\vec{u}\cdot\vec{v}$**

Exemples :

- $2\vec{u}\cdot(-\vec{v} + 3\vec{w}) = 2\vec{u}\cdot(-\vec{v}) + 2\vec{u}\cdot(3\vec{w}) = -2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 6\,\vec{u}\cdot\vec{w}$
- si $k = -1$ on a : $\vec{u}\cdot(-\vec{v}) = -\vec{u}\cdot\vec{v}$ autrement dit : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{CA}) = (-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$

Remarque : en utilisant la relation de Chasles pour décomposer un vecteur, on peut développer un produit scalaire.

Par exemple, si ABCD est un rectangle alors :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

$= 0 + AB \times AB - BC \times DA + 0 = AB^2 - BC^2$ Produits scalaires de 2 vecteurs orthogonaux

EX 10 et 11

c) Produit scalaire et orthogonalité

On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque leurs directions sont orthogonales.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur du plan.

Théorème : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

Dém : p 233

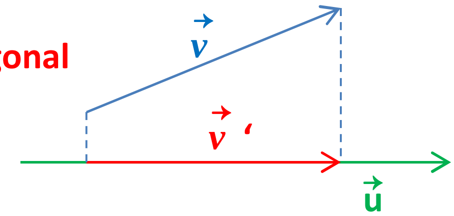
Remarques :

- Avec ce théorème, on a : (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
- De $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, on ne peut déduire que : $\vec{v} = \vec{w}$.

En effet : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux, ce qui peut être le cas sans que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne soient égaux.

II) Autres expressions du produit scalaire

a) Avec le projeté orthogonal



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls. Si $\vec{v}\,'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$, alors on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}\,'$

Dém : p 233

Remarques :

- **$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\,'\cdot\vec{v}$ où $\vec{u}\,'$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$.**
- Cette expression du produit scalaire est intéressante dans des configurations avec des angles droits.

Ex 7

b) Avec la norme

Définition : soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même.

On note : $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$.

Conséquences :

- $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$
- $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

Propriétés de calcul : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- **$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$**
- **$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$**
- **$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$**

Dém : p 234

Ex 25 - 26 p 254

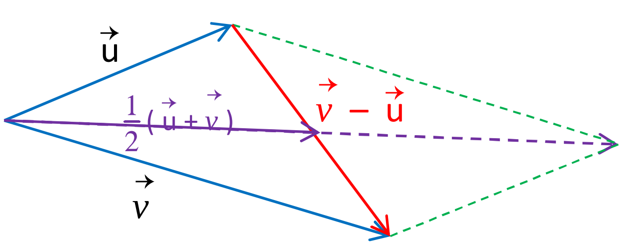
En écrivant les deux propriétés précédentes en utilisant le carré scalaire d'un vecteur, on obtient :

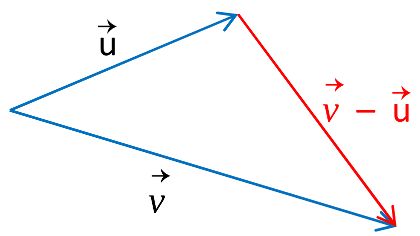
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Ce qui permet d'exprimer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ de deux façons :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Figures clé associées :





Ex 16 – 17 et 26 p 253

c) Dans une base orthonormée

Théorème :

si dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Dém : par définition des coordonnées d'un vecteur dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ donc

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\underbrace{(\vec{i}.\vec{i})}_{=1} + xy'\underbrace{(\vec{i}.\vec{j})}_{=0} + yx'\underbrace{(\vec{j}.\vec{i})}_{=0} + yy'\underbrace{(\vec{j}.\vec{j})}_{=1}$

$= xx' + yy'$

Ex 13 – 14 – 15 - 18 – 19