Exercices 0 — Révisions, petits calculs

ECS1 – 2019/2020

La calculatrice n'est **jamais** autorisée aux concours. Vous pouvez vendre la vôtre, la confier à un cadet, l'échanger, vous en servir comme presse-livre, mais en **aucun cas** vous ne pouvez vous en servir pour résoudre la moindre question de cette feuille.

Ces exercices doivent être travaillés petit à petit tout au long de l'été. Le but est de vérifier qu'il ne subsiste aucune zone d'ombre sur une panoplie de techniques usuelles de Terminale.

Vous ne devez laisser aucune erreur de calcul : apprenez à développer des techniques pour vérifier vos calculs. Par exemple :

- dans un calcul, développer est très rarement une bonne idée. Il faut au contraire toujours chercher à factoriser ;
- quand vous pensez avoir les solutions d'une équation, reprenez l'équation du départ et vérifiez que les valeurs trouvées conviennent effectivement ;
- quand vous prétendez avoir une primitive d'une fonction, dérivez cette primitive : vous devez retomber sur la fonction de départ ;
- à chaque ligne de calcul, vérifiez qu'aucun signe moins ne s'est transformé en plus. Faites attention aux parenthèses : elles ne sont pas facultatives, vérifiez que vous ne les avez pas oubliées d'une ligne à l'autre. Ne vous trompez pas de signe en développant.

Les exercices sont de difficulté variable : certains sont évidents, d'autres moins. Ils sont tous truffés de pièges bien connus, d'incitations à commettre les étourderies classiques des étudiants distraits. À chaque question, demandez-vous si vous n'êtes pas tombé dans l'un de ces pièges.

En mathématiques, vous ne devez **jamais** écrire un résultat faux, et vous ne devez **jamais** affirmer une proposition sans preuve.

Bon courage, et bonnes vacances.

Exercice 1. Soient x et y deux réels, et n et m deux entiers. Compléter les règles de calcul sur les puissances.

$$x^n \times x^m = \cdots ;$$
$$(x \times y)^n = \cdots ;$$
$$x^{-n} = \frac{1}{\cdots} ;$$
$$(x^n)^m = \cdots ;$$
$$\frac{x^n}{x^m} = \cdots .$$

(Spoiler : vous allez passer votre année d'ECS1 à faire des erreurs sur ces règles de calcul. Apprenez-les dès maintenant.)

Exercice 2. Écrire les nombres suivants sous la forme $2^a 3^b$.

$$6^3 ; \qquad 9^2 ; \qquad 4^3 ; \qquad 9^n ;$$

$$e^{2\ln(3)} ; \qquad 36^{n+1} ; \qquad (\sqrt{6})^{2n}.$$

Exercice 3. Comparer :

$$4 \text{ et } \frac{31}{8} \qquad ; \qquad \frac{2}{3} \text{ et } \frac{3}{5}.$$

Exercice 4. Soient a, b, c et d quatre réels. Quelles égalités sont vraies ?

$$\frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{c} \qquad \frac{a \times c + b}{c \times d} = \frac{a+b}{d}$$

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \qquad d \times \frac{a+b}{c} = \frac{a \times d + b \times d}{c}$$

(Spoiler : cela va vous sembler incroyable, mais vous allez passer votre année d'ECS1 à faire des erreurs sur ces règles de calcul. Apprenez-les dès maintenant.)

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $3x-3<1-2x$;
2. $2(x-3) \geqslant 8-3x$;
3. $\dfrac{1-3x}{4} \leqslant 0$;
4. $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{1-x}{2} \geqslant 0$;
5. $1-2x^2-x>0$;
6. $x^2-16<0$;
7. $\left(4x^2-9\right)(x+1) \geqslant 0$;
8. $\dfrac{3-x}{x+4}>0$;
9. $\dfrac{x^2+x}{3-2x}>0$;
10. $\dfrac{1-3x}{1-x} \geqslant 2$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Quel est le signe de : $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{2n}$?

Exercice 7.

1. Simplifier les fractions suivantes :
$$\frac{26}{12} \qquad \frac{33}{121} \qquad \frac{0.006}{0.052} \qquad \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \text{ (x étant un nombre réel quelconque ?)}$$
2. Réduire au même dénominateur
$$\frac{4x}{x-1}-\frac{2x^2}{x^2-1}$$
3. Écrire les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur :
$$\frac{3}{\sqrt{6}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}+1} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \qquad \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$$
4. Montrer que pour tout $x \in \dots$:
$$\frac{4x}{e^{2x}-1}-\frac{x}{e^x-1}=\frac{x\left(3-e^x\right)}{e^{2x}-1}$$
puis résoudre :
$$\frac{4x}{e^{2x}-1} \leqslant \frac{x}{e^x-1}$$

Exercice 8. (Racine carrée.) Quelles sont les règles de calcul avec la racine carrée ? Précisez pour chaque égalité les valeurs autorisées pour les réels a et b.

1. $\sqrt{ab}=\cdots$;
2. $\sqrt{a+b}=\cdots$;
3. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\cdots$;
4. $\sqrt{(3-\pi)^2}=\cdots$;
5. $\sqrt{a^2}=\cdots$;
6. $(\sqrt{a})^2=\cdots$;
7. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\cdots$ (quantité conjuguée).

(Spoiler : oui, oui, là aussi vous allez perdre un nombre incroyable de points en DS. Les ECS2 vous le confirmeront. Apprenez-les dès maintenant.)

Exercice 9. (Valeurs remarquables de exp et ln.) Simplifier : $\ln(e)$; $\ln(1)$; $\ln\left(e^{0}\right)$; $e^{\ln(1)}$.

Exercice 10. (Règles de calcul pour exp et ln.)

1. $e^{a+b} = \cdots$;
2. $\ln(a \times b) = \cdots$;
3. $e^{-a} = \cdots$;
4. $e^{a-b} = \cdots$ (pourquoi cette ligne ne sert-elle en fait à rien ?) ;
5. $\ln\left(a^{2}\right) = \cdots$;
6. $\ln(\sqrt{a}) = \cdots$;
7. $\ln\left(a^{b}\right) = \cdots$;
8. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \cdots$;
9. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \cdots$;
10. $\exp(2\,a) = \cdots$;
11. $\exp(5\,a) = \cdots$;
12. $\exp(a\,b) = \cdots$;
13. $\exp(\ln(a)) = \cdots$;
14. $\ln(\exp(b)) = \cdots$;
15. $\exp(a \ln(b)) = \cdots$.

Préciser, pour chaque ligne, les valeurs de a et b pour lesquelles les égalités sont valides.
(Spoiler : dois-je insister ?)

Exercice 11. Indiquer si les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par les formules suivantes sont dérivables, et lorsque c'est le cas, une expression simple de leur dérivée.

$$f(x) = \ln(x) - \frac{3}{x} + 4x^{2} \qquad g(x) = 5\sqrt{5} \times e^{x} \qquad h(x) = x\ln(x) - x \qquad i(x) = \frac{\ln(x)}{x^{3}}$$

$$j(x) = \exp(2x) \qquad k(x) = \exp\left(2x^{2} + 3x + 1\right) \qquad l(x) = \frac{1}{x^{4}}$$

$$m(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \qquad n(x) = \frac{3}{\left(x^{2} - 2x - 8\right)^{3}} \qquad p(x) = 3^{x}$$

Exercice 12. (Formules d'addition pour les fonctions trigonométriques.)

1. $\cos(a + b) = \cdots$;
2. $\sin(a + b) = \cdots$;
3. $\cos^{2} + \sin^{2} = \cdots$ (théorème de Pythagore) ;
4. $\cos(2\,a) = \cdots$ (avec uniquement cos) ;
5. $\cos(2\,a) = \cdots$ (avec uniquement sin) ;
6. $\cos(2\,a) = \cdots$ (mélange des deux) ;
7. $\sin(2\,a) = \cdots$;

Démontrer que : $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

(Cette formule n'est pas à connaitre par cœur, mais il faut savoir la retrouver instantanément.)

Exercice 13. (Valeurs remarquables.) Pour chaque $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$, donner les valeurs de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.
Que pensez-vous de $\cos(1)$, $\sin(1)$?

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$;
2. $\cos(x) = \frac{-1}{2}$;
3. $\tan(x) = -1$.

Exercice 15. Démontrer que $1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$. Pour quelles réels x l'égalité précédente est-elle valable ?

Exercice 16. Soit $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Quel est le signe de $\cos(\theta)$? Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}.$$

(Il y a $n-1$ racines imbriquées.)

Exercice 17. Déterminer tous les complexes z tels que z, $1-z$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 18. Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$. (Indication : ne voyez-vous vraiment pas plus simple que le calcul fastidieux que vous avez démarré ?)

Exercice 19. Résoudre l'équation $\exp(z) = \sqrt{3}+3i$.

Exercice 20. n est un entier naturel. Pour quelles valeurs de n le nombre $(\sqrt{3}+i)^n$ est-il un imaginaire pur ? un réel ?

Exercice 21. Résoudre l'équation $z^2 = i$. On définit la fonction f par $f(z) = \dfrac{2z-i}{z-2i}$. Quel est l'ensemble de définition de f ? Résoudre $f(z) = z$.

Exercice 22. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $4z^2-4z+1 = 0$;
2. $z^2-3z+2 = 0$;
3. $z^2+z+1 = 0$;
4. $z^2+z-2 = 0$;
5. $z^2+4z+5 = 0$;
6. $z^4+4z^3+6z^2+4z-15 = 0$ (difficile).

Exercice 23. Compléter les énoncés suivants avec le connecteur logique qui s'impose, entre $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$:

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4$ ... $x = 2$;
2. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = \bar{z}$ ... $z \in \mathbb{R}$;
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \pi$ ... $e^{2ix} = 1$.

Exercice 24. Peut-on trouver deux réels a et b tels que $a < b$ et $e^a > e^b$? Pourquoi ?

Soient $0 \leqslant a < b$. Que peut-on dire de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$?

Exercice 25. Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+\cos(x))$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.
5. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ (Indication : pensez à la quantité conjuguée vue un peu plus haut.)
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.
9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$ (difficile. Indication : bricolez une somme de termes d'une suite géométrique.)

Exercice 26. Déterminer les domaines de définition des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}\ ;\ g(x) = \sqrt{x^2-2x-5}\ ;\ h(x) = \ln(4x+3).$$

Exercice 27. Soit u une fonction continue sur un intervalle I. Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $u' \times u$;
2. $u' \times u^2$;
3. u' ;
4. $u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$) ;
5. $\dfrac{u'}{u}$ (à quelle condition sur u ?);
6. $u'e^u$;
7. $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
8. u.

Si u et v sont des fonctions dérivables dont la dérivée est continue sur un intervalle I, connait-on une primitive de :

$$u'+v'\ ? \qquad u' \times v'\ ? \qquad 3u'\ ?$$

$$\frac{u'}{v'}\ ? \qquad u'v+uv'\ ?$$

Si oui (ce n'est pas toujours le cas), donner une primitive.

Exercice 28. De manière générale, pour chercher une primitive, il faut d'abord repérer la forme de l'expression parmi celles de l'exercice précédent. Bien souvent, la fonction n'a pas la forme exacte attendue, mais il faut ajuster un coefficient multiplicatif.

Par exemple si l'on définit f par $f(x) = x\exp(3x^2)$, il faut remarquer que l'on a *presque* la forme $u'e^u$, où $u(x) = 3x^2$. Une primitive de f s'écrit *presque* sous la forme $g(x) = \exp(3x^2)$. Mais en dérivant g, on obtient $g'(x) = 6x\exp(3x^2)$: g n'est pas une primitive de f à cause de ce 6 parasite qui apparait en tête. Cela nous donne l'idée de multiplier l'ensemble par 1/6 pour s'en débarrasser.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est par exemple la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{6}\exp\left(3x^2\right)$.

En résumé :

1. repérer la forme générale de la primitive, parmi celles vues à l'exercice précédent ;
2. écrire une *quasi*-primitive. C'est souvent la bonne, mais à un coefficient multiplicatif près. **Dériver cette fonction** ;
3. on voit alors apparaitre le coefficient avec lequel compenser pour tomber exactement sur la fonction du départ.

Donner une primitive pour les fonctions suivantes. Préciser un intervalle sur lequel cette primitive est valable.

$$f_0(x) = 0\ ; \qquad f_1(x) = 3x^2\exp\left(-7x^3\right)\ ; \qquad f_2(x) = 3x^3 - x^2 + 9\ ;$$

$$f_3(x) = e^x\ ; \qquad f_4(x) = e^{-4x}\ ; \qquad f_5(x) = \frac{x}{x^2+1}\ ;$$

$$f_6(x) = \frac{\ln(x)}{x}\ ; \qquad f_7(x) = \frac{1}{x\ln(x)}\ ; \qquad f_8(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}\ ;$$

$$f_9(x) = \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ ; \qquad f_{10}(x) = \sin(x)\ ; \qquad f_{11}(x) = \cos(x)\ ;$$

$$f_{12}(x) = \tan(x) \text{ (soyez rusés) } ; \qquad f_{13}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^5(x)} \text{ (même astuce) } ;$$

$$f_{42}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ (indication : dérivez d'abord tan) } ;$$

(Indication : à l'exception de la dernière, elles sont d'une des formes de l'exercice précédent.)

Exercice 29. La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché. Pour des raisons historiques, géographiques et géopolitiques, elles espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préfèrerait un garçon.

On définit les évènements suivants :

1. A : l'héritier d'Aquitaine est un garçon ;
2. B : l'héritier de Bourgogne est un garçon ;
3. C : les deux héritiers sont de même sexe.

Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$. Pris deux à deux, ces évènements sont-ils indépendants ? Que pensez-vous de $P(A \cap B \cap C)$ et de $P(A) \times P(B) \times P(C)$?

Exercice 30. Dans un jeu télévisé, on dispose sur le plateau trois rideaux fermés. Derrière deux d'entre eux se trouve une botte de paille, et derrière le troisième se trouve un billet d'entrée en prépa ECS. Le candidat rêve d'obtenir ce billet d'entrée.

Le présentateur demande au candidat de choisir l'un des trois rideaux. Au moins l'un des deux rideaux restant cache une botte de paille : le présentateur ouvre ce rideau. Il propose ensuite au candidat soit de maintenir son premier choix de rideau, soit de changer d'avis et de prendre l'autre rideau resté fermé.

On note A l'évènement : « le candidat garde le même rideau, et obtient le billet d'entrée en ECS. »

On note B l'évènement : « le candidat choisit l'autre rideau, et obtient le billet d'entrée en ECS. »

Montrer que $P(A) \neq P(B)$ (c'est bel et bien différent), et indiquer quel candidat a la meilleure stratégie.

Exercice 31. Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

- du premier coup ?
- du troisième coup ?
- du cinquième coup ?
- du huitième coup ?