# Document de préparation aux mathématiques pour la rentrée en PC

**F.Bès**

## 1 Principe

Ce document est un recueil d'une vingtaine d'exercices d'application directe du cours, avec indications et conseils. Ces exercices vous permettront de réviser un certain nombre de techniques et raisonnements classiques de SUP qu'il est **indipensable de connaître pour bien aborder l'année de SPE et les concours**.

Voici la démarche qu'il faudrait adopter :

a) **Faire tous les exercices avant la rentrée en PC**, si besoin en vous aidant des conseils et indications en Partie 3, et en vous reportant bien sûr à votre cours de SUP,

b) **Apprendre par coeur les théorèmes utilisés** pour faire ces exercices (ils sont cités dans les indications), par exemple en faisant des fiches

c) Revoir les cours correspondant aux exercices qui vous ont posé des difficultés.

Une correction sera disponible à l'adresse suivante : `https://frama.link/PC19-20` une petite semaine avant la rentrée.

La probabilité qu'une interrogation soit prévue sur ces différentes techniques à la rentrée est très proche de 1.

# 2 Exercices

## 2.1 Changement d'indice dans les sommes

Compléter les formules suivantes en effectuant le bon changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots} x^j \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} a_{k+1} x^k = \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{\dots} x^{2j}$$

## 2.2 Sommes géométriques

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 3 \times 4^k,\ S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k},\ S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1} 3^{k-1}}$$

## 2.3 Sommes téléscopiques

Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}),\ S_2 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+2} - a_k),\ S_3 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1})$$

## 2.4 Limites usuelles

Calculer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$ et $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{3/x}$.

## 2.5 Utilisation des croissances comparées

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$, $\lim_{x\to-\infty} (x^4+1)e^x$, $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2}$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{\ln x}}$.

## 2.6 Suites arithmético-géométriques

a) Déterminer le terme général de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 3u_n - 2$$

. b) Faire de même avec la suite $(v_n)$ définie par $v_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = -v_n + 4$$

## 2.7 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

a) Déterminer le terme général de la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

b) Faire de même avec la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = 1, v_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$$

## 2.8 Manipulation de graphe de fonctions

Tracer le graphe de $x \mapsto \ln x$ et en déduire celui des fonctions suivantes

(a) $x \mapsto \ln(1+x)$ (b) $x \mapsto 2 - \ln x$ (c) $x \mapsto 1 + \ln(x-1)$ (d) $x \mapsto \ln|x|$

## 2.9 Utilisation de la relation de comparaison d'équivalence

Donner un équivalent simple de $u_n = \dfrac{\ln(1+n^{-2})}{n\sin(1/n)}$ et $v_n = \dfrac{2^n}{n^2+3^{n+1}}$ lorsque $n \to +\infty$.

## 2.10 Lien entre dérivation et intégration

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ ?

$$g(x) = \int_x^0 f(t)\mathrm{d}t,\ h(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \text{ et } k(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$$

Déterminer leur dérivées en fonction de $f$.

## 2.11 Obtention de primitives usuelles

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur $]0,\pi[$, puis de $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

## 2.12 Dérivée de fonctions usuelles

a) Soit $t$ un réel strictement positif. Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de $u : x \mapsto t^x e^t$.
b) Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de $v : x \mapsto x^{1/x}$.

## 2.13 Equations différentielles linéaires

Résoudre les équations différentielles linéaires :
1) $y' = ay + b$ en fonctions des constantes réelles $a$ et $b$.
2) $y'' + ky = 0$ pour $k \in \{-1, 0, 1\}$.
3) $y'' + 2y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4) $y'' + 4y' + 4y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

## 2.14 Calcul avec les complexes

a) Déterminer les solutions complexes de $z^4 = 1$, puis celles de $z^5 = z$.
b) Faire de même avec $z^3 = -8i$.

## 2.15 Sev/App.linéaire/Endomorphisme

a) Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Montrer que $g : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P - XP''$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

## 2.16 Image et noyau d'un endomorphisme

a) Déterminer le noyau puis le rang de l'endomorphisme $D : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
b) Montrer qu'une forme linéaire non nulle est de rang 1.

## 2.17 Mise sous forme de Vect

a) Mettre $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = z - 2x = 0\}$ sous forme de sous-espace vectoriel engendré. En déduire une base de $F$ et sa dimension.
b) Faire de même avec les sev $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + t = 2z + t = 0\}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = 0\}$.

## 2.18 Matrice d'une application linéaire

a)Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x + y - 2z, z - t, x + z) \in \mathbb{R}^3$$

dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
b) Faire de même avec l'endomorphisme $g : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P - XP'' \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $g$ est bijectif.

## 2.19 Probabilité

Une pièce $A$ donne *face* avec une probabilité $1/2$ et une pièce $B$ donne *face* avec une probabilité $2/3$. On choisit une pièce au hasard, on la lance et si on obtient *face*, on conserve la pièce que l'on vient de lancer sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir *face* au 1er lancer ? Au 2e lancer ?

## 2.20 Variables aléatoires

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, P)$, telles que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et $Y$ suit une loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, et supposées indépendantes. On définit $Z = XY$.
Déterminer dans l'ordre : $Z(\Omega)$, la loi de $Z$, $P((Z = 0) \cup (Y = 1))$, l'espérance et la variance de $Z$.

# 3 Conseils et indications

## 3.1 Changement d'indice dans les sommes

*Ne pas hésiter à se donner des repères du type* $j = k - 1$*, si* $k \in \{\dots\}$ *alors* $j \in \{\dots\}$.

## 3.2 Sommes géométriques

*Revoir la* ***formule de calcul de la somme des premiers termes d'une suite géométrique****, bien faire attention au premier terme de la somme.*

## 3.3 Sommes téléscopiques

*Dans un premier temps on pourra développer la somme en utilisant des points, on pourra aussi utiliser des changements d'indice.*

## 3.4 Limites usuelles

*Passage obligé par la fonction exponentielle pour ces limites avec utilisation des équivalents ensuite (attention de ne pas composer un équivalent avec* $\exp$*) ou bien avec utilisation de DL.*

## 3.5 Utilisation des croissances comparées

*Connaître par coeur les résultats de* ***croissances comparées*** *entre fonction* $\ln$*, puissance et* $\exp$ *et savoir les appliquer directement ou par changement de variable.*

## 3.6 Suites arithmético-géométriques

*Revoir la méthode correspondant à ces suites, attention à la deuxième suite dont le 1er terme est* $v_1$ *et non* $v_0$.

## 3.7 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

*Revoir les* ***théorèmes correspondants aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2****, ne pas confondre avec les résultats sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes, à coefficients constants.*

## 3.8 Manipulation de graphe de fonctions

*Les graphes des fonctions usuelles sont à connaître, ainsi que leurs propriétés, notamment celui de la fonction* $\ln$.

## 3.9 Utilisation de la relation de comparaison d'équivalence

*Bien revoir les définitions des relations de comparaison* $o, O, \sim$*, le formulaire des équivalents ainsi que les techniques usuelles sur les équivalents : produit, quotient mais pas de somme ou de composition (sauf dans certains cas très restreints).*

## 3.10 Lien entre dérivation et intégration

*Ce lien est fait avec le* ***théorème fondamental de l'intégration*** *(ou de l'analyse) qu'il est indispendable de connaître par coeur.*

## 3.11 Obtention de primitives usuelles

*Il est souvent utile pour la recherche de primitives de reconnaître des fonctions de la forme* $u' \times u^{\alpha}$ *dont une primitive est* $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ *si* $\alpha \neq -1$, $\ln|u|$ *si* $\alpha = -1$.

## 3.12 Dérivée de fonctions usuelles

*Attention de dériver par rapport à la bonne variable et d'utiliser le formulaire de dérivation des fonctions à bon escient.*

## 3.13 Equations différentielles linéaires

*Revoir les* ***théorèmes*** *et techniques sur les EDL1 et 2.*

## 3.14 Calcul avec les complexes

*Revoir la notion de racine n-ième de l'unité. L'utilisation de la forme exponentielle peut-être un réel avantage pour la résolution d'équations avec des complexes.*

## 3.15 Sev/App.linéaire/Endomorphisme

*La confusion entre sev et linéarité d'une application est à éviter absolument. Les deux définitions (ou caractérisations) sont à connaître par coeur.*

## 3.16 Image et noyau d'un endomorphisme

*Ces deux notions d'image et de noyau doivent être maitrisées : définitions, propriétés et bien sûr le* ***théorème du rang****.*

## 3.17 Mise sous forme de Vect

*Technique usuelle qu'il faut connaître car elle permet de montrer qu'un ensemble est un sev et en plus de déterminer une famille génératrice de ce sev, ce qui fera un bon candidat pour une base. Ne pas oublier de vérifier que les vecteurs obtenus vérifient bien les équations du sev.*

## 3.18 Matrice d'une application linéaire

*Cela ne doit pas être fait au hasard mais en utilisant les repères* $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ *et* $e_1, \ldots, e_n$ *autour de la matrice. Pour montrer la bijectivité d'un endomorphisme, on peut regarder l'inversibilité de sa matrice dans une base donnée.*

## 3.19 Probabilité

*On pourra faire intervenir les événements* $F_k$ *: "obtenir face au k-ieme lancer" et* $A_k$ *: "lancer la pièce A au k-ieme lancer" et utiliser la* ***formule des probabilités totales*** *avec un système complet d'événements bien choisi.*
*Un bon exercice (un peu plus dur) est une généralisation avec la recherche de* $P(F_k)$ *pour un entier naturel non nul k quelconque : on obtient une relation de récurrence liant* $P(A_{k+1})$ *et* $P(A_k)$ *aboutissant à une suite arithmético-géométrique.*

## 3.20 Variables aléatoires

*C'est l'occasion de revoir les définitions d'espace probabilisé, de variable aléatoire, les lois usuelles, l'indépendance, l'espérance et la variance.*