De la Terminale à la MPSI

Introduction

Ce document destiné aux élèves entrant en classe de MPSI au lycée Berthollet d'Annecy, est un outil qui doit permettre à chacun d'aborder la première année de classes préparatoires dans les meilleures conditions possibles sans pour autant sacrifier ses vacances bien méritées après l'obtention du Baccalauréat.
L'objectif premier est de se familiariser avec les techniques de bases qui sont indispensables à la compréhension des notions abordées en MPSI.
Chaque chapitre est suivi d'une liste d'exercices. Il est vivement conseillé d'essayer de les résoudre sans aide extérieure dans un premier temps. Ne pas réussir à les résoudre ne préjuge en rien de votre réussite en prépas. Cela montre tout au plus le caractère indispensable d'un cours dispensé par un professeur !

Table des matières

I Rédaction, mode de raisonnement

I .1 Vocabulaire

I .1.1 Ensembles usuels

Rappelons les notations usuelles pour désigner les ensembles suivants :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs. $\mathbb{Z}^* = \{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs.
  On peut écrire : $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

On a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

I .1.2 Quantificateurs

- **Quantificateur universel** : il est noté $\forall$. La notation $\forall x$ signifie pour tout x ou quelque soit x.
  Par exemple, la phrase mathématique : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ signifie : Pour tout réel x, le réel x^2 est positif.
- **quantificateur existenciel** : il est noté $\exists$. L'expression $\exists a$ signifie : “il existe un objet a” .

Les quantificateurs (utilisés uniquement dans des "phrases mathématiques") permettent d'écrire des propriétés sous forme condensée. Il faudra être vigilant lors de leur manipulation et notamment ne pas les inverser.
Ainsi la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, y = x^2$$

signifie que tout réel x possède un carré que l'on nomme ici y. y dépend bien-sûr de x.
En revanche, la propriété

$$\exists y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2$$

signifie qu'il existe un réel positif y qui "serait" le carré de tous les réels x. Un tel y n'existre pas. Cette propriété est fausse.
Nous verrons d'autres symboles logiques comme $\Rightarrow, \Leftrightarrow$. Il faudra se garder d'abuser de ces symboles dans vos raisonnements. Tout ceci nous amène au paragraphe suivant.

I .2 Rédaction

La rédaction d'une démonstration et plus généralement d'un devoir est un point essentiel en mathématiques. Une rédaction claire et lisible est la preuve d'une bonne maîtrise des notions utilisées.
La rédaction mathématique obéit à des règles précises. Les nombreuses démonstrations faites en cours vous permettront rapidement d'appliquer ces règles.
Une bonne rédaction permet :

- d'être lu par le correcteur.
  Le but d'une copie est d'être lue et corrigée. Il faut d'une part se conformer aux notations de l'énoncé et d'autre part présenter une copie propre et claire. Résultats encadrés, questions correctement repérées ...
- de structurer sa pensée.
  Bien rédiger est un premier outil pour clarifier ses idées et chercher la solution la plus simple possible.
- éviter les erreurs.
  Rédiger avec rigueur et clarté permet de déceler certains pièges.

– de gagner (ou de ne pas perdre) des points aux concours.
Un correcteur peut corriger jusqu'à 400 copies. Une copie bien rédigée sera traitée avec plus de bienveillance qu'une copie qui ressemble à un brouillon.

Il faut distinguer "phrase mathématique" c'est-à-dire écrite avec des quantificateurs et "phrase française". La règle de base est de ne pas mélanger les deux.
Écrire : ($\forall x \in I, x$ est positif) est incorrect. On écrira :

$$\forall x \in I, x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \text{tout élément } x \text{ de } I \text{ est positif.}$$

I .3 Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend de l'entier n. Pour démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, on peut procéder de la manière suivante.

- On montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie (**Initialisation**).
- On suppose que $\mathcal{P}(n)$ pour un entier n fixé. On démontre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie (**Hérédité**).

On conclut alors : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.
On verra une forme plus rigoureuse et d'autres formes de démonstrations par récurrence.

Ne jamais écrire dans la formulation de la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$$\mathcal{P}(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \ldots$$

Exercice 1. Montrer les deux résultats suivants : pour tout entier naturel non nul

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 2. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|$$

On utilisera une inégalité (appelée inégalité triangulaire) : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

II Calculs algébriques

II .1 Généralités

Une bonne maîtrise du calcul algébrique est indispensable en mathématique et aussi en physique.
Les règles de bases vues au collège doivent être appliquées sans aucune hésitation :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad a^n a^m = a^{n+m}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Exercice 3. Développer $(a+b+c)^2$

Il faudra connaître les deux sommes de l'exercice 1. ainsi que la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique $(q^k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R}, \quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

II .2 Sommes

Pour sommer un nombre (fini) de n termes $a_1, a_2, \dots, a_n$, on peut écrire :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (1)$$

On comprend alors ce qui signifient les pointillés (sauf mauvaise foi). Pour éviter toute ambiguïté, on notera cette somme à l'aide du symbole $\sum$ (Sigma majuscule) :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

La variable k appelée **indice** est une variable muette (elle n'est pas présente dans l'écriture (1)). Elle peut être remplacée par tout autre indice i, j ou *toto*.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{toto=1}^{n} a_{toto}$$

Rq : On peut penser à l'intégration où $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. t est la variable d'intégration qui est aussi une variable muette.

On retiendra que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ne dépend pas de k. Elle dépend de n.

On peut donc écrire :

$$\begin{array}{lclcll} 1+2+\cdots+n & = & \sum_{k=1}^{n} k & = & \frac{n(n+1)}{2} & \\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 & = & \sum_{k=1}^{n} k^2 & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \\ 1+q+q^2+\cdots+q^n & = & \sum_{j=0}^{n} q^j & = & \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{array}$$

Exercice 4. Utiliser $\sum$ pour représenter le sommes suivantes :

1. $S = a_5 + a_6 + \cdots + a_p$
2. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$
3. $U_n = 1.2 + 2.3 + \cdots + n.(n+1)$
4. $V_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (2n)$
5. (plus difficile) Essayer de calculer les sommes S_n, U_n et V_n.
6. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

II .3 Produits

De la même manière que la somme, un produit de n facteurs $a_1, \dots, a_n$ est noté

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1.a_2 \dots a_n$$

La lettre i est encore un indice et toujours une variable muette.

Exercice 5. Que valent les produits suivants (trouver une expression simple en fonction de n)

1. $\prod_{k=1}^{n} (-2)$
2. $\prod_{k=1}^{n} 3^k$

Si les facteurs d'un produit sont tous strictement positifs, il peut être pratique de transformer le produit en somme.

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$$

II .4 Factorielle

Pour tout entier naturel n non nul, on définit $n!$ (lire **factorielle** n) par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Ainsi

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120$$

Par convention, on pose $0! = 1$. On a alors la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \times n!$$

Exemple 1. *Étudions le produit des nombres consécutifs* $2, 4, 6, ..., 2n$. *On peut l'écrire :*

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(2k) &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) \\
&= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \ldots (2 \times n) \\
&= \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ facteurs}} \times 1 \times 2 \times \cdots \times n \\
&= 2^n \times n!
\end{aligned}$$

Exercice 6. Simplifier : $A = \dfrac{2!7!}{9!}$ et $B = \dfrac{(n+2)!}{n!}$

Exercice 7. Montrer en utilisant les facteurs pairs (et sans effectuer de récurrence) que :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

III Trigonométrie et nombres complexes

III .1 Trigonométrie

Tout ce qui tourne autour de cos et sin doit être maitrisé et notamment le lien avec le cercle trigonométrique qui vous permet de retrouver les valeurs usuelles de cos et sin en $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

Les formules et propriétés suivantes sont à connaître (ou à retrouver à l'aide du cercle trigonométrique) :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$.
- La fonction sin est 2π-périodique, impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

- La fonction cos est 2π-périodique, paire et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\pi+x) = -\cos(x) \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi-x) = -\cos(x) \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$$

- Formules d'addition :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\end{cases}$$

- Formules de linéarisation :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)\\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)\\ \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)\end{cases}$$

- Formule de duplication :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \text{et} \quad \cos(2x) = \begin{cases} \cos^2(x)-\sin^2(x)\\ 2\cos^2(x)-1\\ 1-2\sin^2(x)\end{cases}$$

- Résolution d'équations trigonométriques : pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\cos(x)=\cos(a) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \begin{cases} x = a+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=-a+2k\pi\end{cases} \qquad \sin(x)=\sin(a) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \begin{cases} x = a+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=\pi-a+2k\pi\end{cases}.$$

- $\sin,\ \cos$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin'(x)=\cos(x),\ \cos'(x)=-\sin(x)$

Exercice 8. Déterminer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 9. Déterminer sans calcul le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto \sin(x)\cos(x)$

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$(a)\ \cos(x)=\frac{1}{2}, \qquad (b)\ \sin(2x)\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

III .2 Nombres complexes

Il convient de réviser les points suivants

- Forme algébrique d'un nombre complexe : $z=a+\mathrm{i}b$ avec a,b réels. Partie réelle, partie imaginaire.
- Conjugué d'un nombre complexe et opérations : $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}, \overline{zz'}=\overline{z}.\overline{z'}$ ...
- Module d'un nombre complexe et opérations : $|z|^2=z\overline{z}$ et $|zz'|=|z||z'|$ ...
- Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels. Forme canonique de ax^2+bx+c.
- Forme trigonométrique : module, argument. Interprétation géométrique.
- La formule $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$ permet de retrouver les formules trigonométriques d'additions.

Exercice 11. Écrire sous forme algébrique les complexes : $z_1=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$ et $z_2=\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^3$.

Exercice 12. Soit $z = \dfrac{-2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$.
Écrire la forme algébrique de z puis sa forme trigonométrique ($r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$). En déduire z^3.

Exercice 13. Résoudre l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 + 10z + 169 = 0$.

Exercice 14. Trouver les nombres complexes z tels que $z + \dfrac{1}{z}$ soit réel.

IV Dérivation

La dérivation est au coeur de l'étude des fonctions. Il est primordial d'être à l'aise dans le calcul des dérivées et de savoir déterminer le signe de la dérivée d'une fonction. On pensera à factoriser les expressions obtenues.
Rq : nous réitérons ici un voeu : que les élèves de la prochaine rentrée ne confondent pas f et $f(x)$. Une fonction f peut-être continue, dérivable. Ce ne sera jamais le cas de $f(x)$ qui n'est pas une fonction.
Écrire : $f(x)$ est dérivable est donc une faute, qui agace quand elle est répétée !

IV .1 Calcul des dérivées

Il est essentiel de connaître les formules de dérivation (somme, produit, quotient) ainsi que les dérivées des fonctions usuelles (puissances, exp, ln, cos,sin ...). Vous devez également savoir dérivée les fonctions composées $\exp(u), \ln(u)$....
La dérivée d'une composée de deux fonctions s'obtient par la formule suivante :
(On note $g \circ f$ la fonction définie par : $x \mapsto g(f(x))$ quand tout existe)

Théoréme 1 (Dérivée d'une composée)**.**
Soit f et g deux fonctions définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$, I et J telles que :
– $\forall x \in I, f(x) \in J$ (Ainsi $g(f(x))$ existe et donc $g \circ f$ est bien définie sur I).
– f est dérivable sur I et g est dérivable sur J
Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$$

Exercice 15. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné l'ensemble de définition.

1. $x \mapsto \cos(x^2)$
2. $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(2x)}$
3. $x \mapsto x\ln(x) + x$
4. $x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + 1)$
5. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
6. $x \mapsto \ln(\ln(x))$
7. $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
8. $x \mapsto \dfrac{x}{\cos(x)}$

IV .2 Application de la dérivation

IV .2.1 Étude de fonctions

Une application importante de la dérivation est l'étude de la monotonie des fonctions (Tableau de variation). Cette étude est souvent utilisée pour étudier des équations de type $f(x) = \lambda$ en appliquant ce que l'on nomme parfois le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 16. Soit $p \in \mathbb{R}$. Déterminer en discutant suivant les valeurs de p, du nombre de solutions de l'équation

$$(E) \qquad x^5 - 5x = p$$

IV .2.2 Inégalités

Un bon moyen pour montrer une inégalité du type $f(x) \leqslant g(x)$ est d'étudier le signe de la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$.

Exercice 17. Établir l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$$

Dans quel(s) cas, a-t-on égalité ?

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le maximum sur $[0, +\infty[$ de la fonction f_n définie par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$$

V Intégration

En Terminale, le calcul des intégrales se fait essentiellement par les primitives. On utilise le résultat suivant :

Théoréme 2.
Soit f continue sur $[a, b]$, admettant une primitive F sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

La bonne connaissance des primitives des fonctions usuelles (à mettre en parallèle avec les dérivées) est indispensable. Il convient de s'entrainer sérieusement dans ce domaine.

Exercice 19. Calculer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré

1. $I = \mathbb{R}$. $x \mapsto \cos(2x) + 3\sin(7x)$
2. $I = \mathbb{R}$. $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}$
3. $I = \mathbb{R}$. $x \mapsto \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$
4. $I =?$. $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$

Exercice 20. Calculer les intégrales suivantes

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$
- $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^3\,\mathrm{d}t$.
- $I_4 = \displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-3x^2}\,\mathrm{d}x$.
- $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
- $I_6 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}\,\mathrm{d}x$