

La monnaie de la pièce...

Trois clients prennent leur petit déjeuner dans un bar. Ils doivent payer 30 € et donnent chacun un billet de 10 €. La patronne décide de leur faire une réduction de 5 €.

Le serveur prend donc 5 pièces de 1 €, mais, ne pouvant les partager en trois il décide de glisser 2 € dans sa poche et donne une pièce de 1 € à chacun des trois clients.

Enfin finalement chacun a payé $(10 - 1)$ €, donc 9 €. En ajoutant les 2 € du serveur, on obtient $((9 \times 3) + 2)$ € soit **29 €!**

MAIS nous avons **30 €**. Où est donc passé le dernier euro?

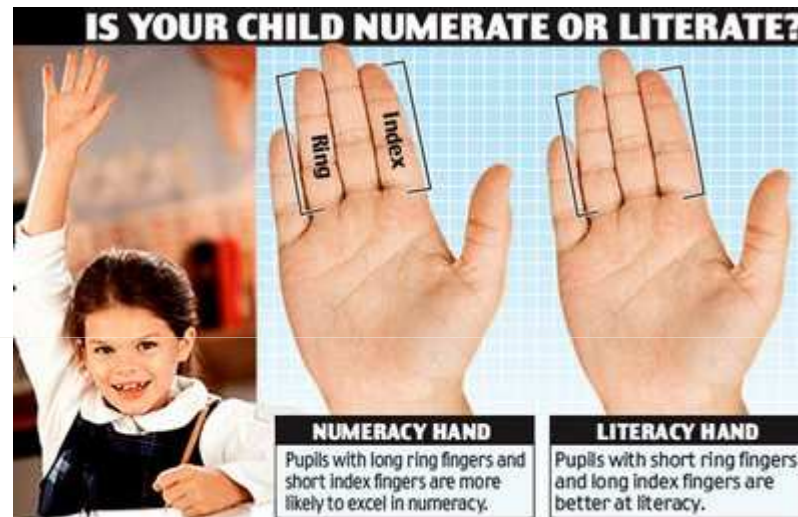
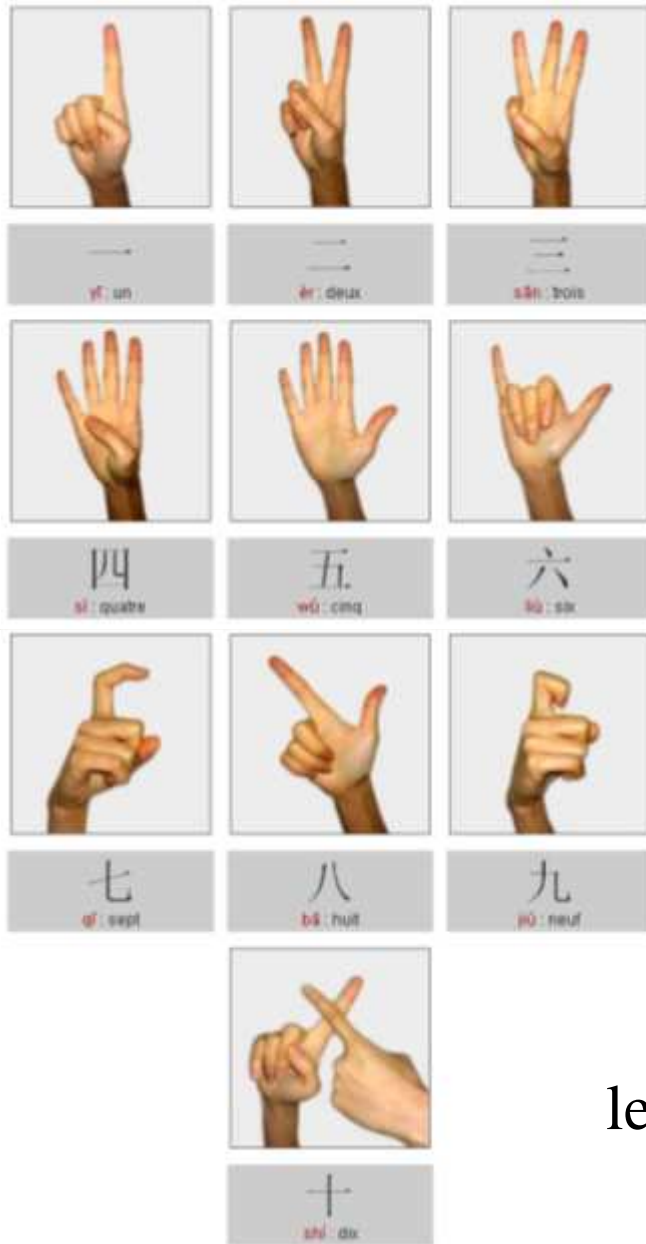
construire le nombre

apprentissage et... difficultés



Thierry DIAS, IUFM de LYON
thierry.dias@iufm.univ-lyon1.fr
<http://perso.orange.fr/dias.thierry/>





les nombres, leur histoire, leur culture

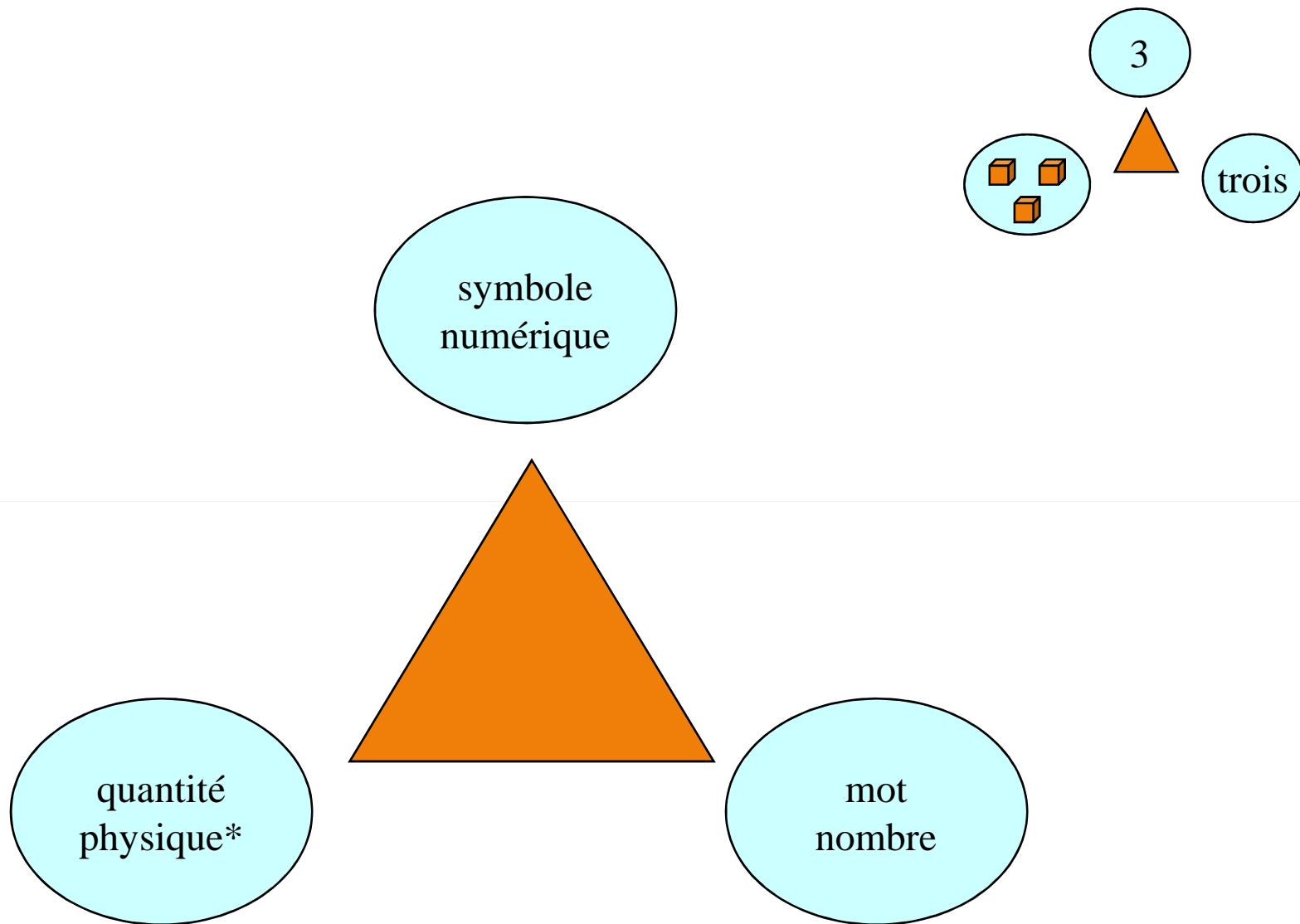
1. Le concept de nombre
2. Apprendre, ou mais comment ?
3. Quelques obstacles
4. Repères didactiques
5. Situation d'apprentissage
6. Outils et matériel

Plan

1. Le concept de nombre

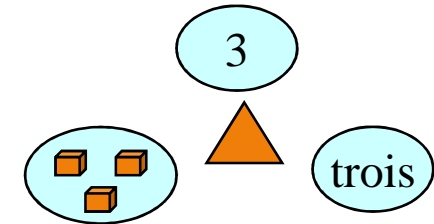
une relation triangulaire

construire le concept de nombre

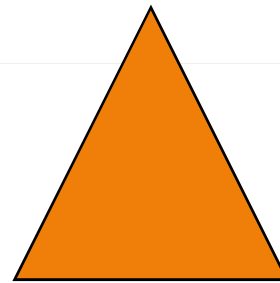


construire le concept de nombre

numération
de position



donner un sens
au codage
numérique



reconnaître une
collection et la
nommer

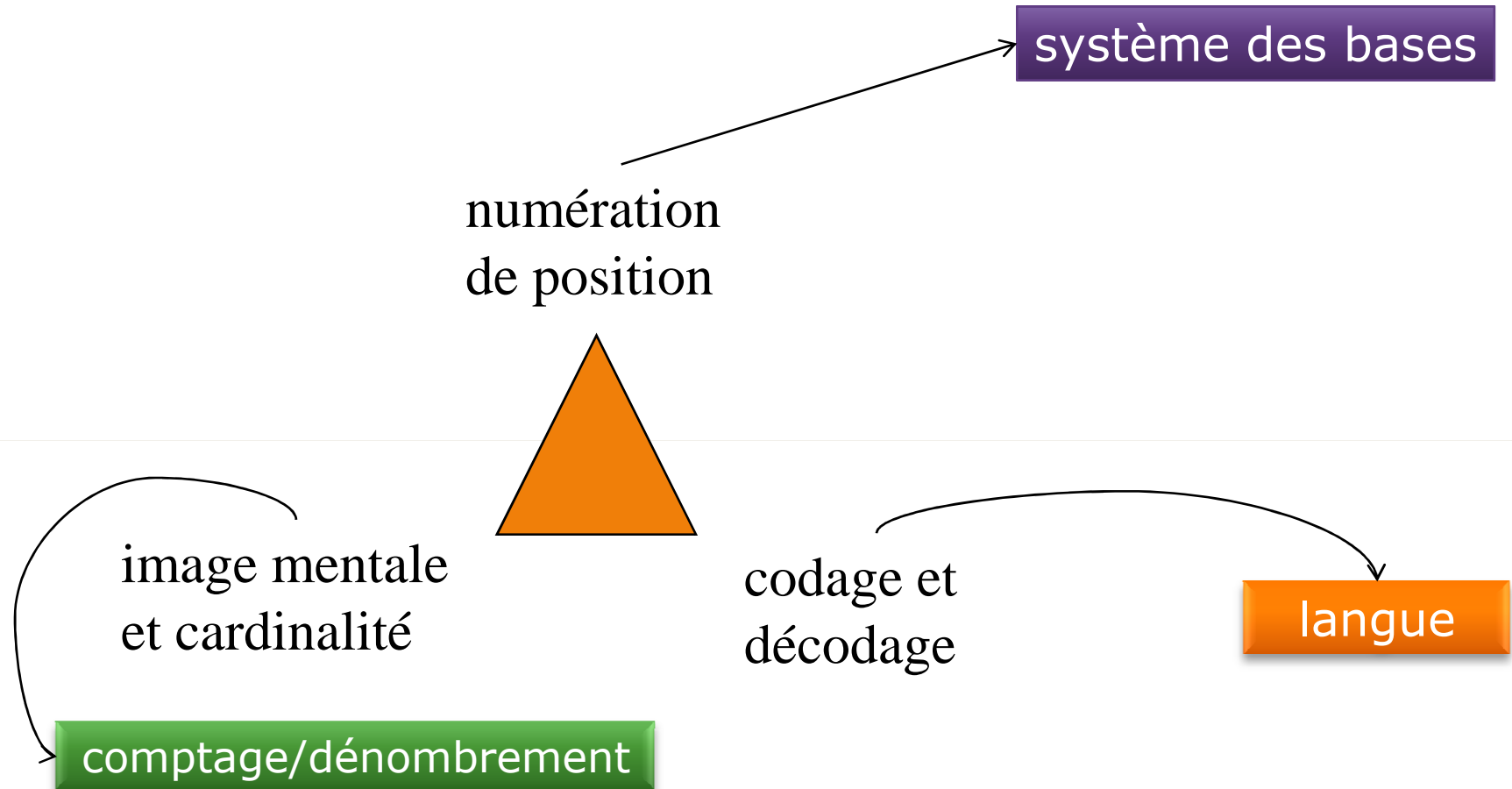
image mentale et
cardinalité

savoir nommer
les nombres qu'on
lit et qu'on écrit

codage et
décodage

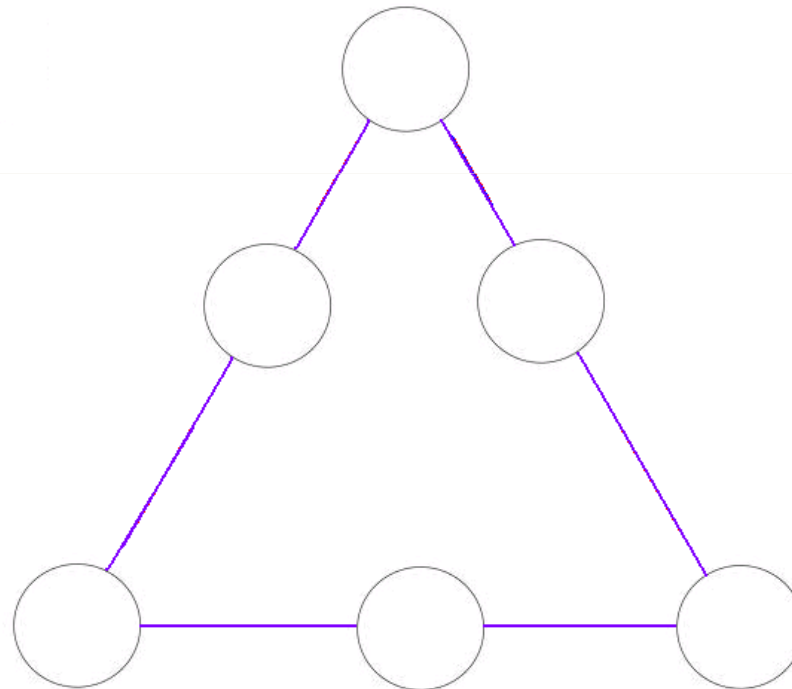
construire le concept de nombre

difficultés principales



récréation 2

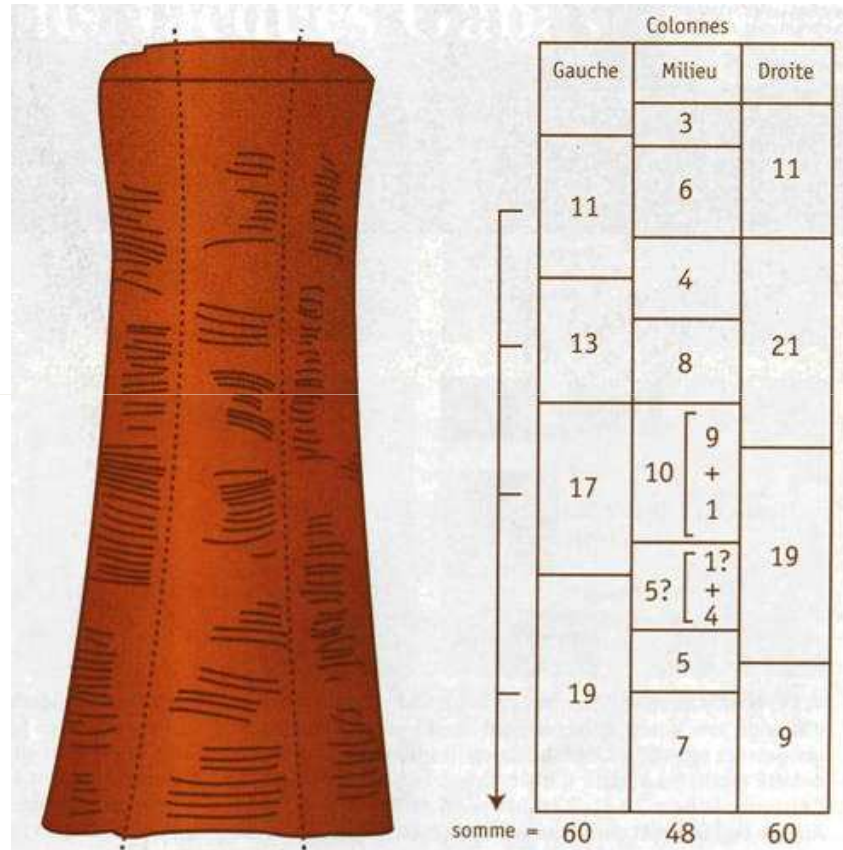
Placer les six nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans les cases pour que la somme des trois nombres soit égale à 10 sur chacun des côtés du triangle.



les nombres ont-ils un lien avec le réel ?

Le bâton d'Ishango
20 000 à 25 000 Av JC

Un bâton qui parle ou que
l'on fait parler ?



source : <http://dma.ens.fr.culturemaths>

«tout sujet apprenant le nombre doit se poser naturellement les mêmes questions que ses inventeurs pour le comprendre»

axiomatique
déduction



résolution d'un
problème

règle → application → démonstration

problème → procédure → commentaire

problème :

représenter une
quantité

procédure :

plusieurs "mêmes"



Mésopotamie, IV^e av. JC

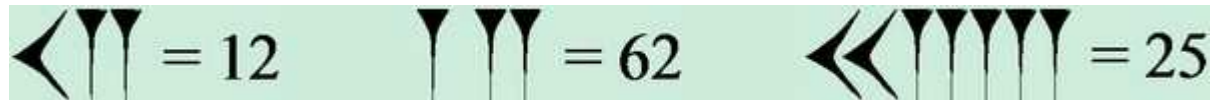
problème : représenter et simuler une quantité



procédure : vers l'abstraction des choses du réel

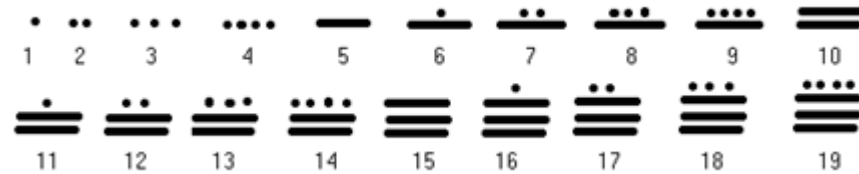
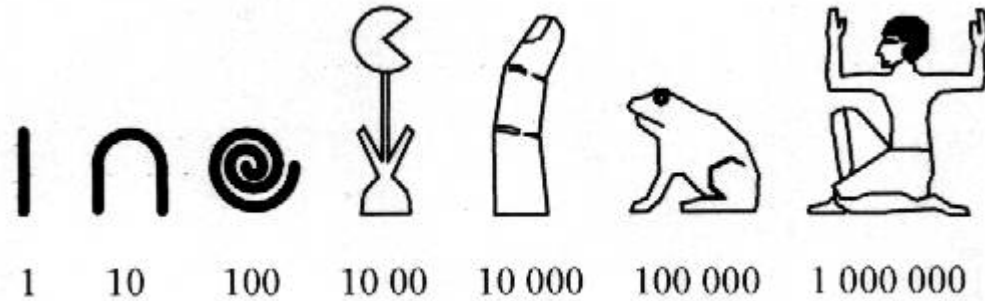
Mésopotamie, II^e av. JC

problème : représenter, et coder une quantité

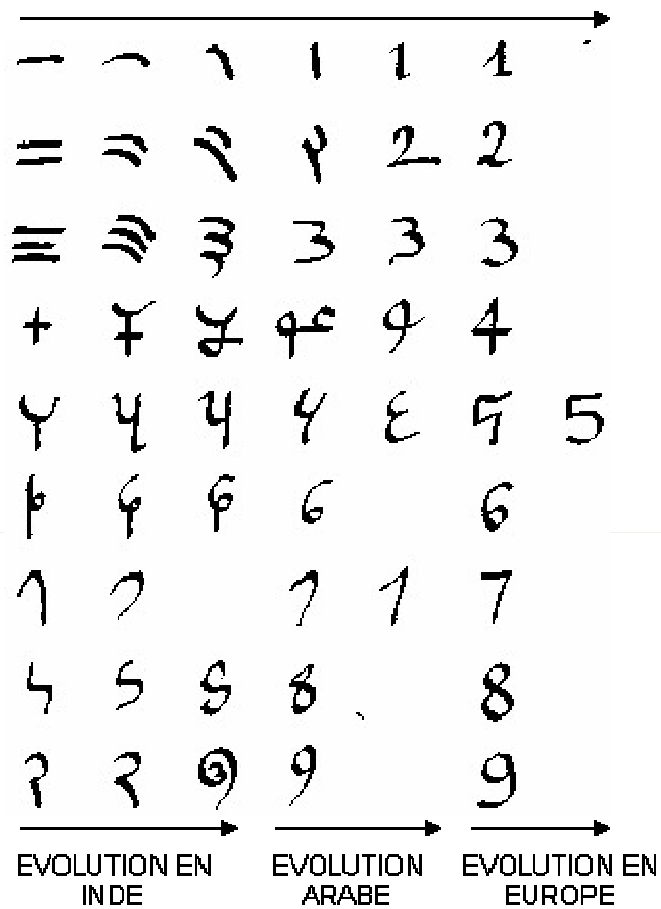


procédure : écrire, garder en mémoire, communiquer
grâce à un système : la numération

faire évoluer le type de représentation



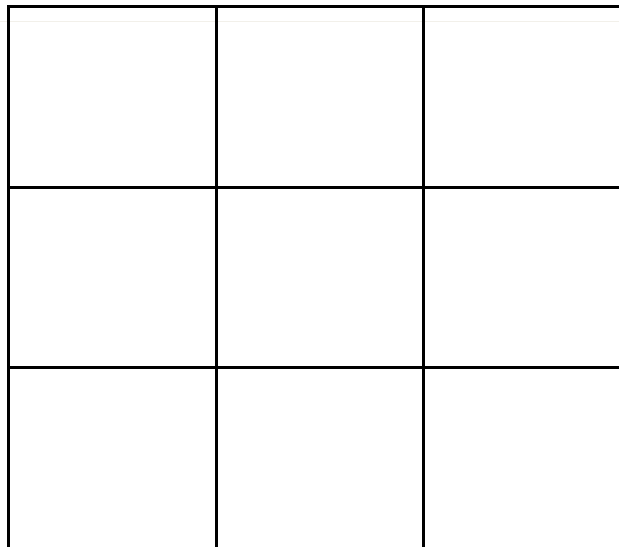
vers une formalisation adéquate



vers la numération décimale

récréation 3

En ajoutant trois jetons à vos six précédents,
pouvez-vous inventer un carré magique ?

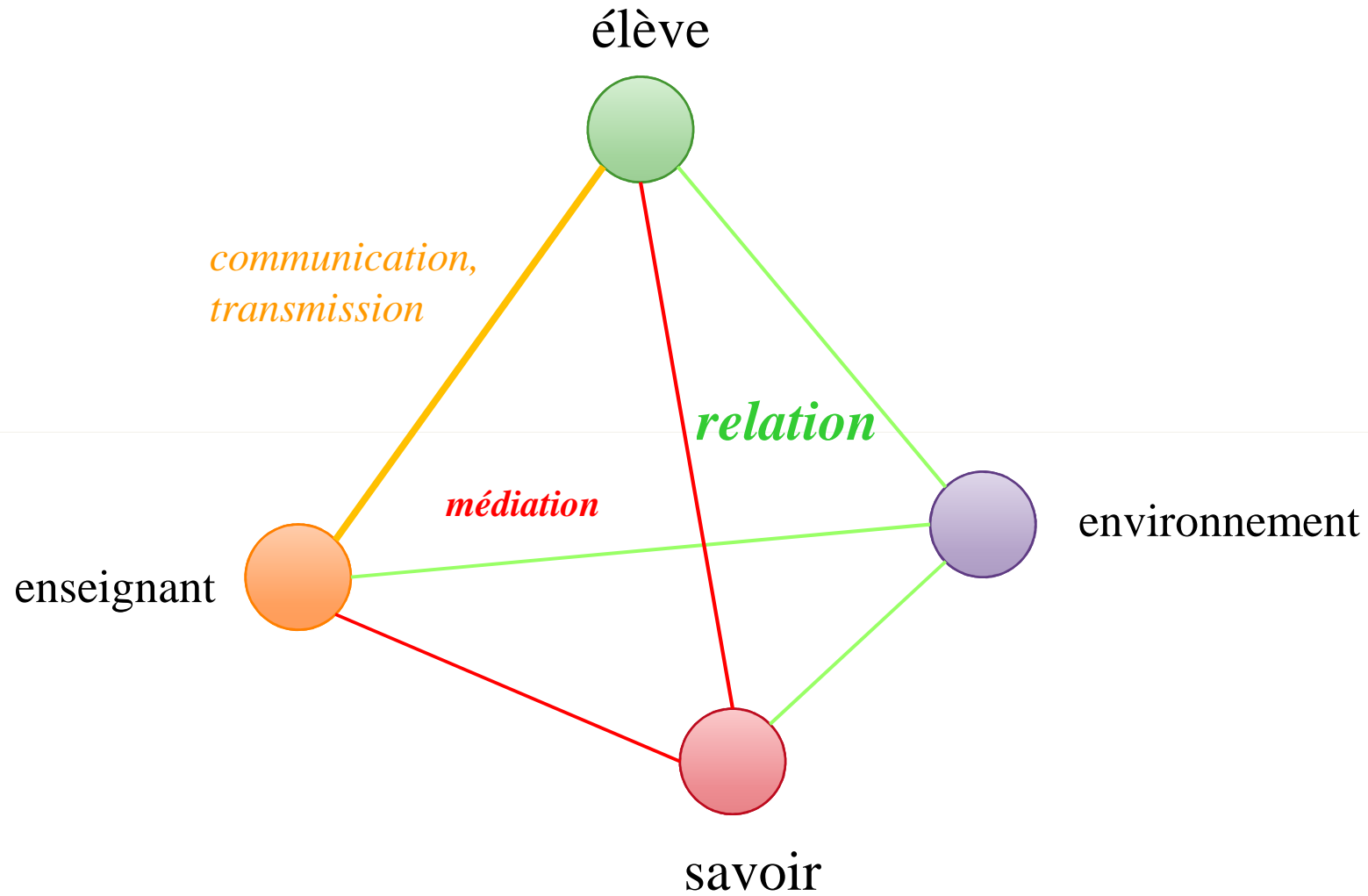


$a + b$	$a - b - c$	$a + c$
$a - b + c$	a	$a + b - c$
$a - c$	$a + b + c$	$a - b$

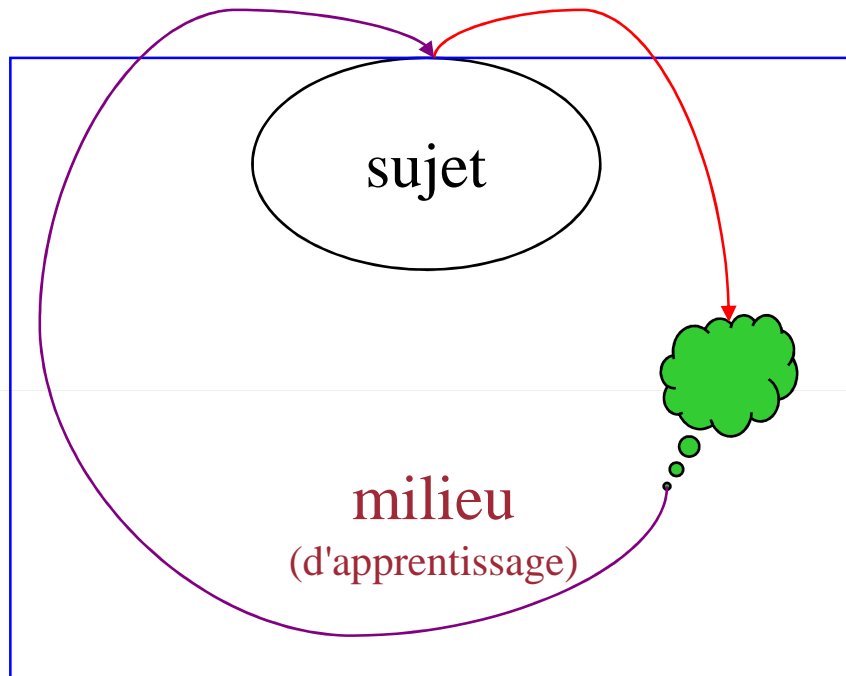
2. Apprendre, oui mais comment ?

la dialectique enseigner / apprendre

2. Enseigner / Apprendre



un modèle d'apprentissage : *Piaget, Szeminska, 1941*



équilibre

élément nouveau

assimilation

accommodation

organisation

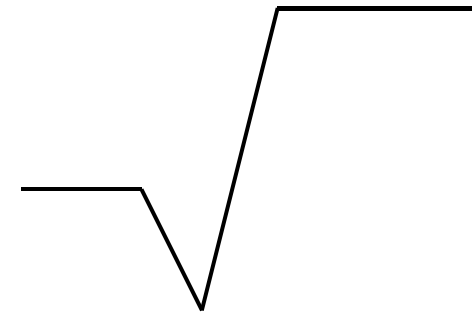
équilibration



Stades de développement

=

Stades d'apprentissages



2. Enseigner / Apprendre

\sqrt{x} existe si $x > 0$ équilibre

$\sqrt{-1} = i$ élément nouveau : rupture, déséquilibre

i est un nombre assimilation

$i^2 = -1$ accommodation

Avec ce nouveau nombre, on peut construire un nouveau monde de nombres aux vertus "extraordinaires" :
les nombres imaginaires lorsqu'ils sont seuls ($5i$), et celui des nombres complexes, lorsqu'ils sont associés aux réels ($4 + 5i$)

organisation

Ces nombres constituent un outil pratique pour résoudre des problèmes en électricité, en fait, partout où il y a du mouvement, des ondes.

équilibration

Piaget, Szeminska, 1941

Ceci permettant de définir les stades de développement connus :

1. le stade sensori-moteur (0 à 2 ans)

le bébé apprend à connaître le monde par les objets qu'il utilise

2. la période pré-opératoire (2 à 6 ou 7 ans)

l'enfant peut se représenter certains actes sans les accomplir ; c'est la période du jeu symbolique

3. le stade des opérations concrètes (6 ou 7 ans à 11 ou 12 ans)

4. le stade des opérations formelles (ou hypothético-déductif)

Piaget, Szeminska, 1941

Cette notion de stades d'apprentissages induit une conception « linéaire » de la construction de connaissances sur le nombre.

Le nombre est au service de la représentation du réel (en le quantifiant, en le mesurant) donc dépendant de l'accumulation d'expériences du sujet.

Pour Piaget, le concept de nombre apparaît tardivement chez l'enfant.

→ point de vue très empiriste



Une autre approche : *Gelman et Gallistel* (années 80, 90)

Les connaissances numériques précoces du bébé sont de nature arithmétiques. Dès le plus jeune âge, les enfants possèdent le concept du nombre et sont ainsi capables de réaliser des calculs simples.

➤ La connaissance de la "comptine" numérique comme préalable.

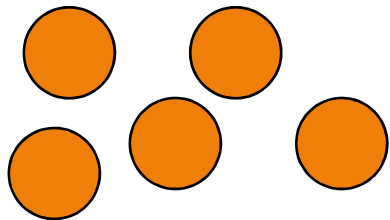
➤ L'importance de l'activité de comptage / dénombrement.

➔ Cinq principes régissent le "comptage".

1. Principe de correspondance terme à terme :

à chaque unité on doit faire correspondre un mot-nombre

Coordonner le geste à la récitation : un mot
par geste, pas plus, pas moins



un

deux

trois

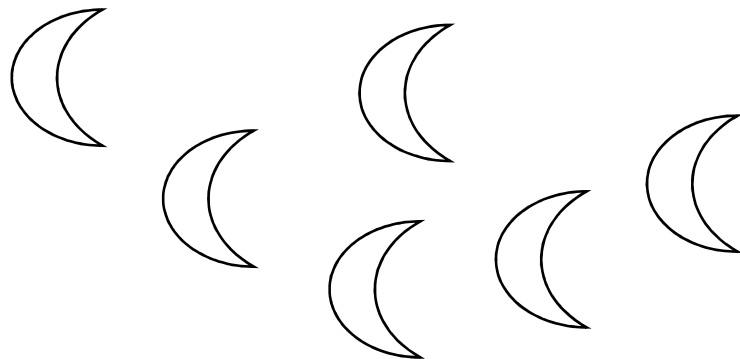
quatre

cinq

2. Principe de suite stable :

les mots nombres doivent toujours être récités de la même façon, sans oubli, sans ajout

Mémoriser une suite de mots et la restituer de la même manière dans des contextes, des organisations qui peuvent varier.



3. Principe d'indifférence de l'ordre :

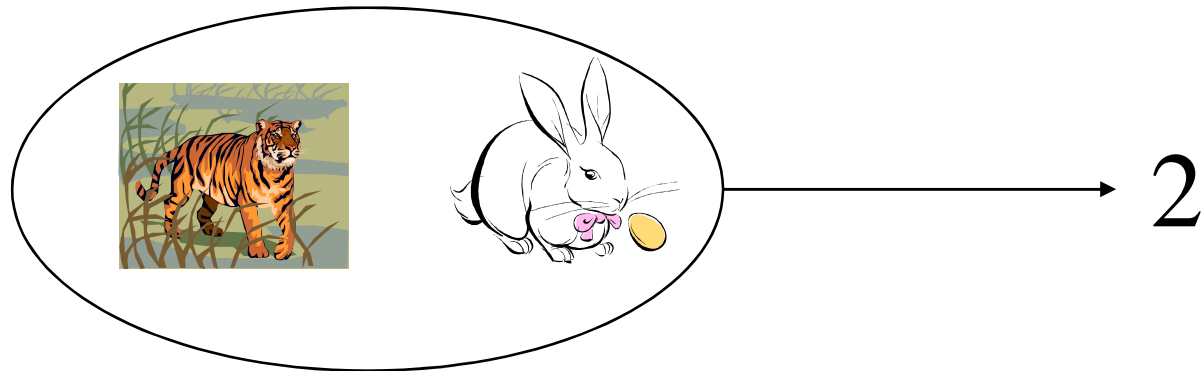
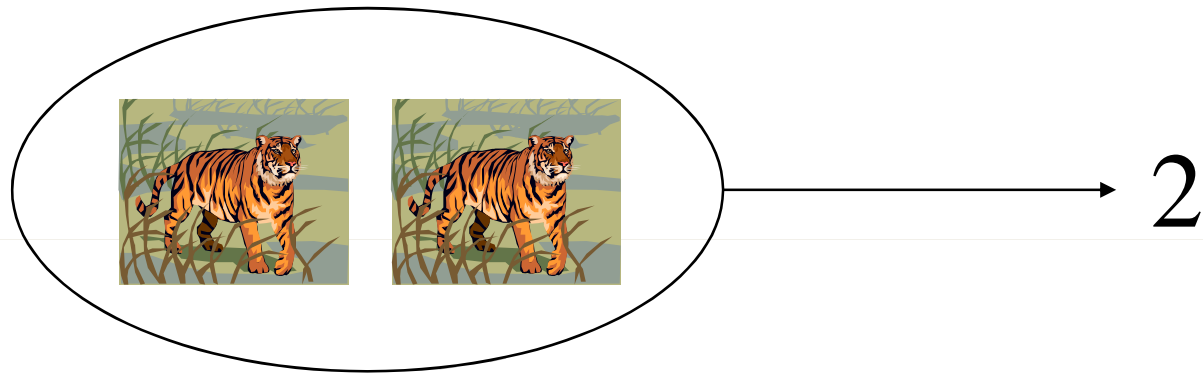
les unités peuvent être comptées dans n'importe quel ordre

L'ordre des objets à dénombrer n'a pas d'importance
alors que les mots qui servent dans cette situation
sont en ordre !

En revanche, l'organisation spatiale des objets dénombrés
revêt une importance qui peut s'avérer fondamentale.

4. Principe d'abstraction :

toutes sortes d'éléments peuvent être rassemblés et comptés ensemble.

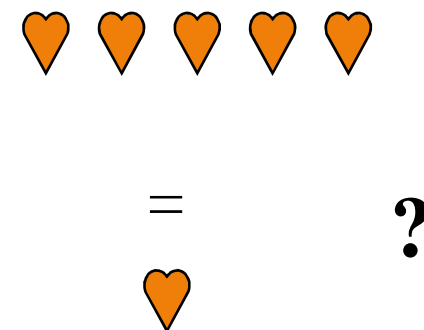
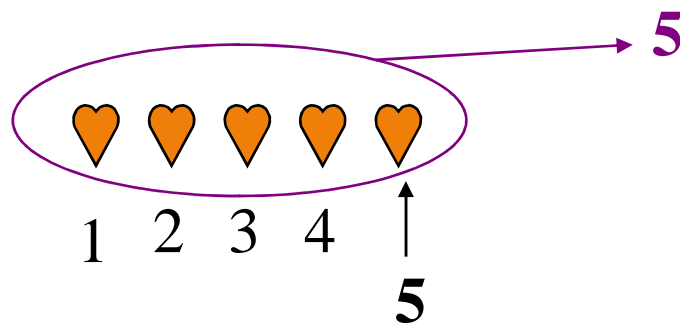


5. Principe cardinal :

le dernier mot nombre prononcé réfère à l'ensemble

Accepter de conceptualiser contre une connaissance...
donc de force, par répétition ou imitation

La question du combien...

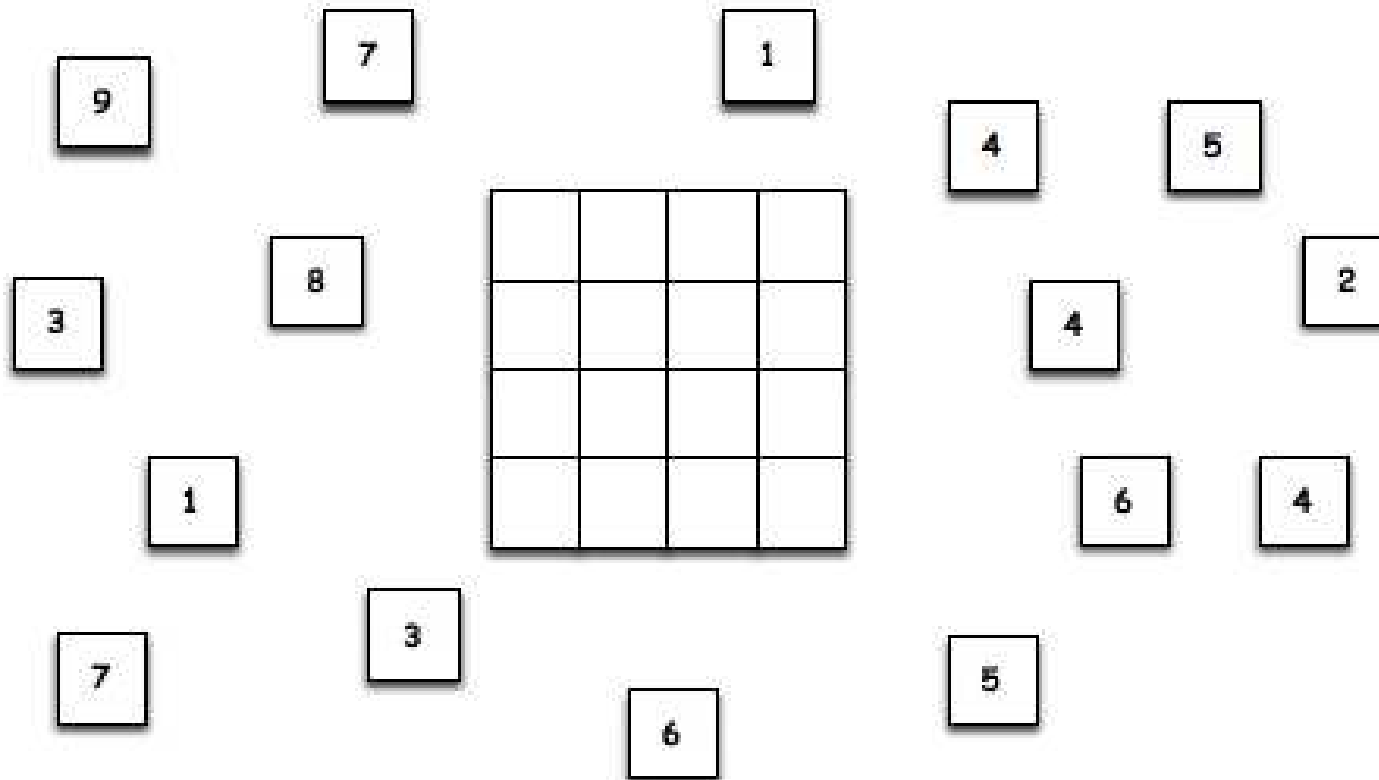


quelques conséquences et conseils didactiques :

- ✓ compter dénombrer des objets du monde pour répondre à une question, (par ex. lors d'un jeu)
- ✓ apprendre à organiser un dénombrement par le geste
- ✓ varier les contextes de récitation de la comptine
- ✓ programmer le processus d'abstraction sans l'accélérer inutilement
- ✓ donner des repères numériques pour faciliter les premiers calculs (éviter le surcomptage)
- ✓ utiliser ses doigts aussi longtemps que cela est nécessaire, c'est l'outil idéal !

récréation 5

Les chiffres se sont échappés de leur cases... A toi de les remettre à leur place.



En lisant les nombres horizontalement ou verticalement tu peux lire:

1597

7254

3715

6434

3416

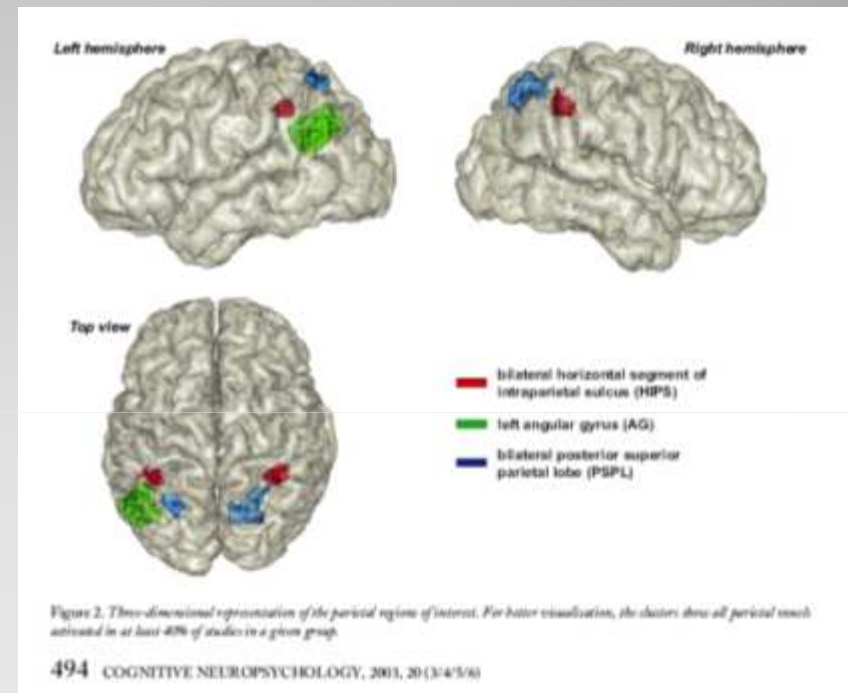
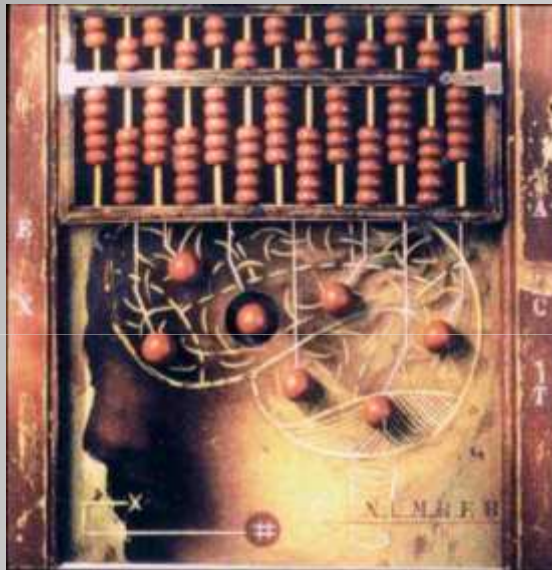
4286

1893

5674

physiologiques
psychologiques
numériques

3. quelques obstacles



Quelques obstacles

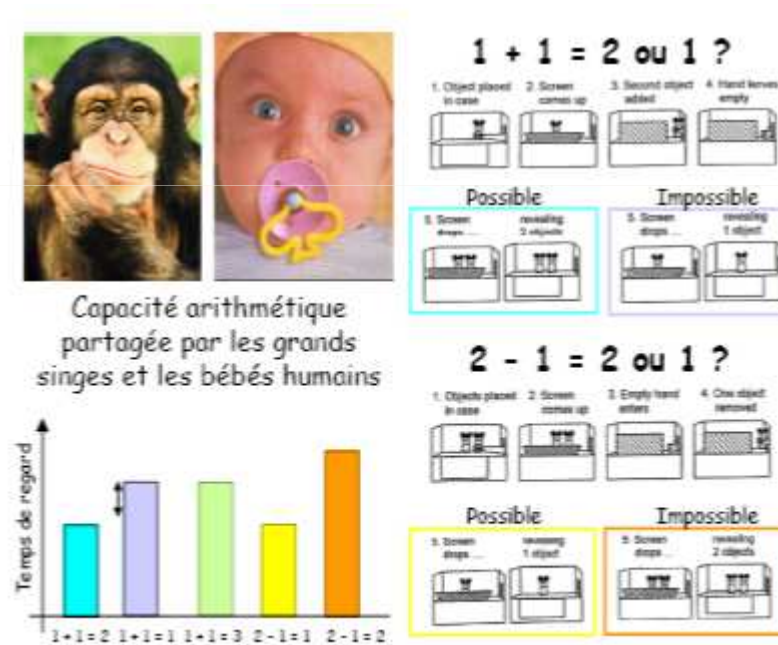
dimension physiologique

3. quelques obstacles

Des capacités numériques sont repérables chez le nourrisson **dès l'âge de 6 mois** : discrimination perceptive, addition et soustraction de petites quantités.

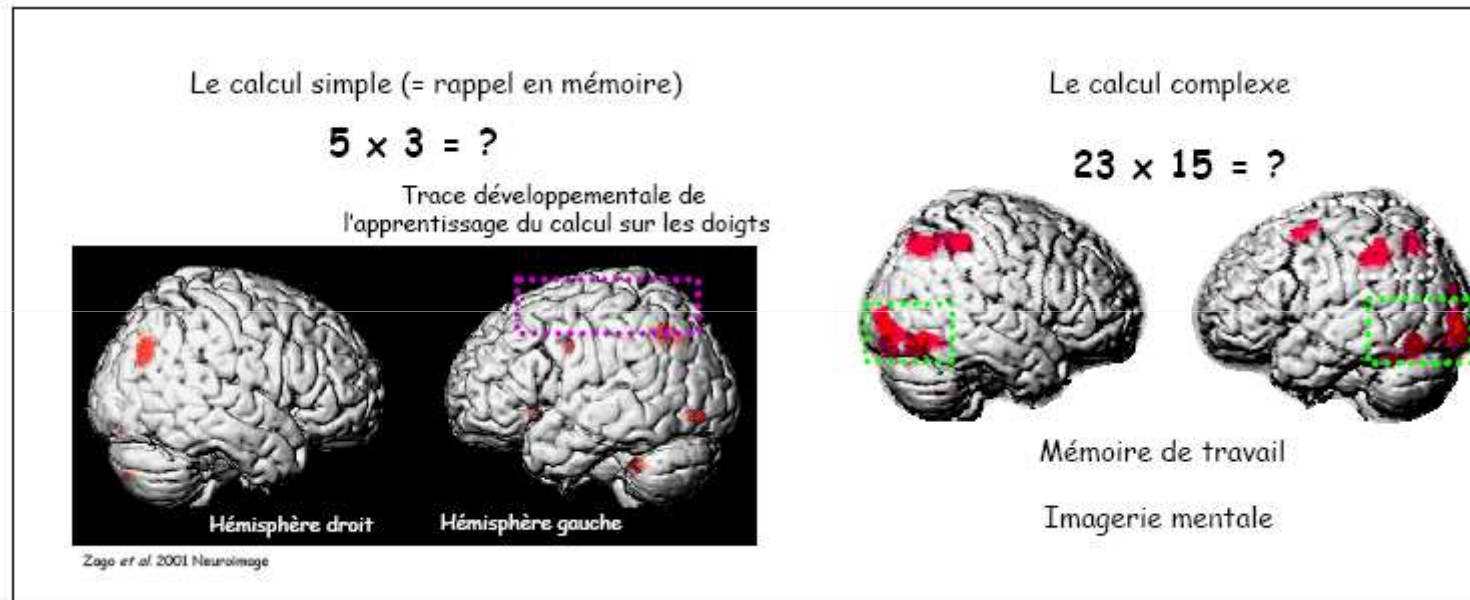
Des capacités que le petit d'homme partage avec ses semblables : singes, dauphins, oiseaux...

pas de quoi pavoiser !



3. quelques obstacles

Les **régions cérébrales concernées** par le calcul et la manipulation des quantités ne sont pas toujours les mêmes (le diagnostic de la dyscalculie s'en trouve compliqué).



Rôle prépondérant du langage comme désignation dans la construction du principe de cardinalité, mais indépendance du système de construction de la numérosité.

la question de la dyscalculie

La dyscalculie n'est pas un concept uniforme dans la communauté scientifique, clinique ou scolaire.

Les termes *dyscalculie* ou *acalculie* sont plutôt réservés chez l'enfant à l'incapacité d'effectuer des opérations formelles (calcul), d'utiliser et d'intégrer les symboles numériques **sans trouble de raisonnement associé.**

Ces troubles spécifiques isolés sont très rares et d'autres troubles y sont presque toujours associés.

3. quelques obstacles

Dyslexie, dysorthographe, dyscalculie Bilan des données scientifiques - Rapport INSERM 2007

Malgré une avancée certaine des études lors des dernières années, les perturbations des mécanismes cognitifs à la base de la dyscalculie, comme pour la dyslexie, sont encore objets d'études et **leur inclusion dans les définitions du trouble paraît prématurée.**

3. quelques obstacles

Dyslexie, dysorthographe, dyscalculie

Bilan des données scientifiques - Rapport INSERM 2007

« Dans la définition de la dyscalculie, comme dans celle des autres troubles des apprentissages, une pédagogie inadaptée vaut critère d'exclusion. Or, **l'apprentissage des mathématiques serait plus lié au type de pédagogie, notamment à la façon dont les concepts sont présentés**, que les autres apprentissages.

Selon un certain nombre de cliniciens et chercheurs, le facteur étiologique prédominant dans le retard en mathématiques serait un enseignement insuffisant. »

3. quelques obstacles

Quelques stratégies pour lutter contre les symptômes de la dyscalculie (une étude américaine de 2006)

Outils d'apprentissage pour l'élève

- ✓ Permettre l'utilisation des doigts
- ✓ Permettre la multiplication des écrits de recherche
- ✓ Permettre l'utilisation de l'ordinateur pour l'entraînement et l'étude
- ✓ Suggérer l'utilisation de papiers spéciaux : millimétré, quadrillé...

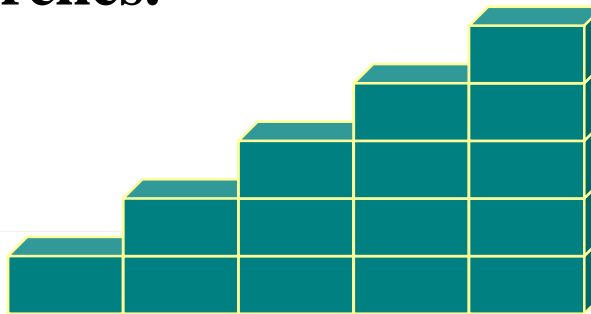
Démarche et méthode de travail

- ✓ Traduire en dessin les mots d'un énoncé problématique
- ✓ Favoriser la manipulation pour expérimenter
- ✓ Utiliser des procédés mnémotechniques

Stratégies d'enseignement

- ✓ Utiliser les schémas et les graphiques pour l'explication
- ✓ Favoriser les aides possibles par des pairs
- ✓ Diversifier les techniques de communication écrite (couleurs...)
- ✓ Utiliser le rythme et la musique pour enseigner certaines notions mathématiques

L'escalier ci-dessous est construit avec 15 pavés et il a cinq marches.



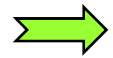
Quel nombre de marches aurai-je à monter si l'escalier était construit avec 120 pavés ?

3. quelques obstacles

- ➡ règles du langage (spécificité du français)
- ➡ numération et compréhension des bases
- ➡ la question du zéro

quelques obstacles
dimension numérique

3. quelques obstacles



règles du langage

	Français	Chinois
1	un, une	yi
2	deux	er
3	trois	san
10	dix	shi
11	onze	shi yi
12	douze	shi er
13	treize	shi san
20	vingt	er shi
21	vingt et un	er shi yi
22	vingt-deux	er shi er
23	vingt-trois	er shi san

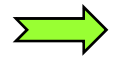
Les règles ne sont pas immuables...

➤ utiliser dix-un et dix-deux

➤ utiliser le repère 5

➤ comprendre la numération avec la famille du cinquante

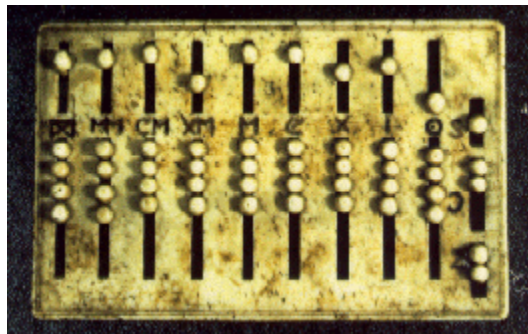
3. quelques obstacles



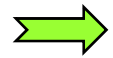
numération et compréhension des bases

Privilégier la notion d'échange en utilisant les outils adéquats.

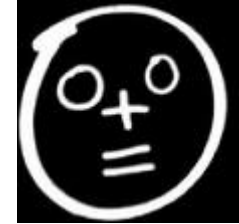
Utiliser les opérations (addition et soustraction) pour "faire fonctionner" la numération.



3. quelques obstacles



la question du zéro



bref retour historique :

inventé très tôt comme chiffre... et très tard comme nombre

son statut mathématique :

en tant que chiffre il sert à désigner l'absence d'un rang dans un nombre

en tant que nombre il est indispensable pour les propriétés de nos opérations

sa place dans la classe :

il faut une étiquette zéro dans la boîte des chiffres

il est quasiment inutile dans une bande numérique

4. Repères didactiques

Comment faire ?

faire faire des mathématiques c'est :

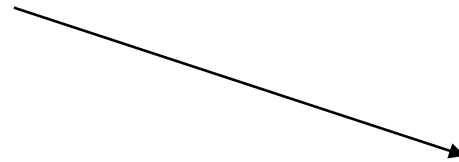
- ★ proposer des situations pour agir seul ou à plusieurs :
→ **expérimenter, chercher**
- ★ organiser des débats scientifiques pour :
→ **raisonner, comprendre**
- ★ programmer des activités individualisées pour :
→ **automatiser, s'entraîner**

4. repères didactiques

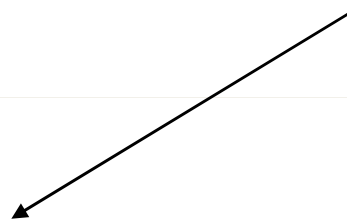
enseigner – apprendre : une démarche



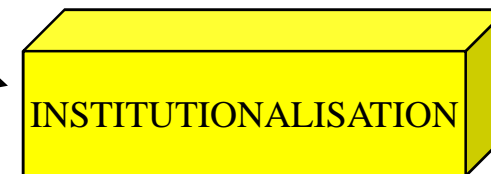
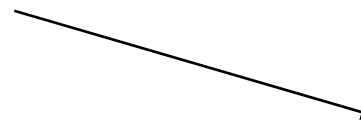
expériences sensibles et mentales
manipulations
connaissances en actes



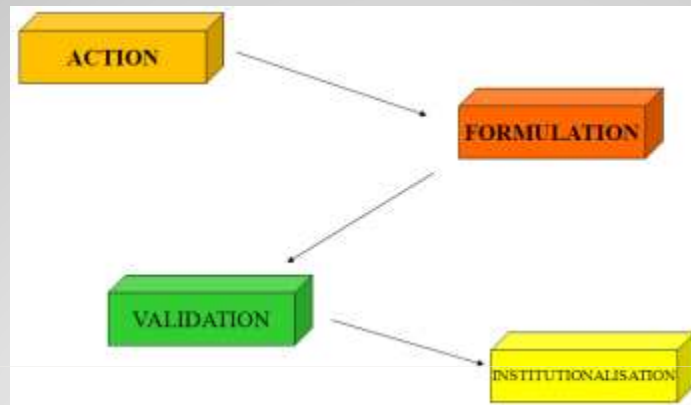
mettre en mots pour faire des hypothèses, des anticipations



argumentation
controverse
preuve



stabilisation du savoir
définitions



situation d'apprentissage

de l'action à l'institutionnalisation



Une **situation** est l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve une personne, ainsi que l'ensemble des relations qui l'unissent à son milieu.

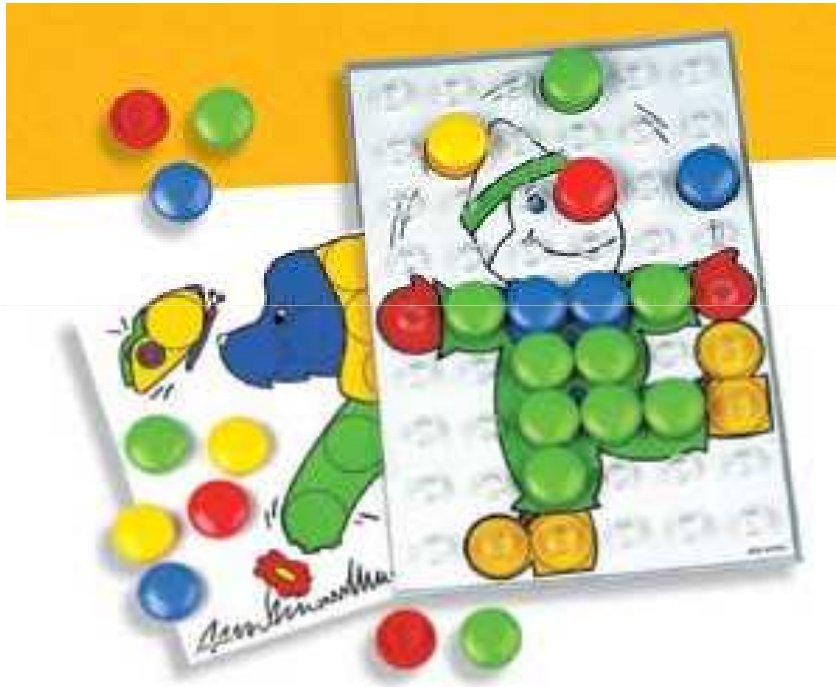
Le **milieu** d'une situation est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans la situation.

Une **situation d'apprentissage** est une situation reproductible qui permet l'acquisition de savoirs ou de connaissances par un sujet.

4. repères didactiques



Le coloredo



Il s'agit d'utiliser un jeu du commerce constitué de plaques en plastiques, de jetons de 4 couleurs pouvant s'encaster sur les plaques et de modèles de dessin se glissant sous les plaques.

4. repères didactiques



Cette situation d'apprentissage permet **à l'élève** de :

- **contrôler son action** et recevoir le contrôle des autres,
- **débattre** avec les autres de la qualité de son résultat;
- de recommencer de lui-même autant de fois qu'il le souhaite;
- de **décider** seul ce qu'il choisit d'entreprendre.

Cette situation permet **à l'enseignant(e)** d'organiser de nombreux problèmes de difficultés progressives. Elle est a-didactique car elle valide les propositions des élèves sans recours systématique à la parole de l'enseignant.

Phase 1 : action-manipulation

-> constituer une expérience sensible

consigne : aller chez le magasinier afin de ramener les jetons nécessaires.

Chaque binôme reçoit une plaque, un dessin. Il faut regarder le dessin avant d'agir. Comme les jetons ne sont pas à la disposition immédiate des joueurs, il faut se déplacer.

A ce stade, la question du combien ne doit surtout pas être évoquée par le professeur, il s'agira seulement de faire décrire les démarches des élèves au moment de la mise en commun.

Phase 2 : où l'on commence à donner de l'importance à la **formulation**





consigne : aller chez le magasinier afin de ramener les jetons nécessaires en un seul voyage.

Comme un seul voyage est toléré, la commande doit être vérifiée au retour par la mise en place des jetons.

Lors de la mise en commun de cette phase, c'est la question de la mémorisation qui devient essentielle : quelles démarches, procédures...

Phase 3 : remplir un bon de commande puis aller chez le magasinier afin de ramener les jetons nécessaires en un seul voyage.

A ce stade du jeu, la question de la **validation** prend tout son intérêt. C'est bien le recours aux nombres qui permettra d'expliquer les erreurs, mais aussi de faire un certain nombre d'anticipations.

BON de commande	
 Jetons rouges
 Jetons bleus
 Jetons jaunes
 Jetons verts
signature :	

Le coloredo

Cette situation représente une situation centrée sur **l'utilisation des nombres**. L'élève qui s'engage dans le problème se trouve dans l'obligation d'**utiliser** les nombres, de prendre conscience de leur rôle, de ce à quoi ils servent.

La règle est facilement compréhensible : apporter le nombre nécessaire et suffisant d'objets. Ainsi, l'élève peut se lancer dans l'action quelles que soient ses connaissances sur le nombre.

4. repères didactiques

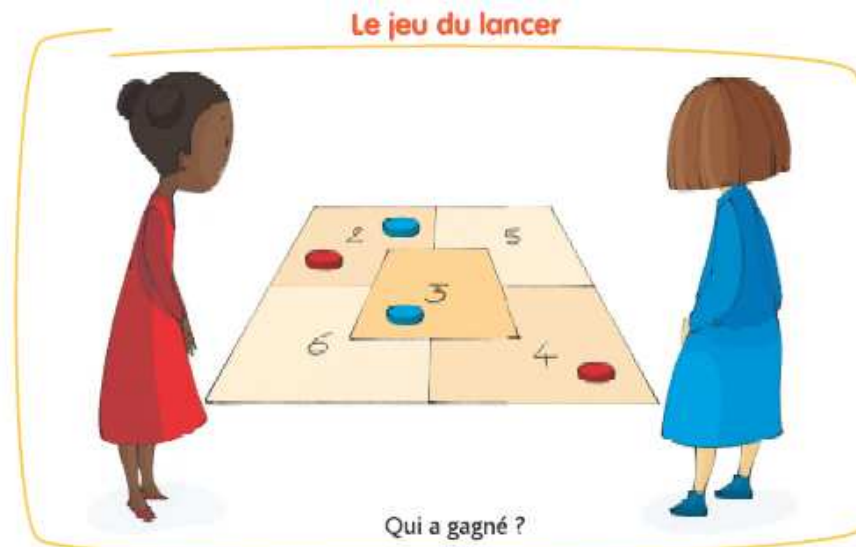
d'autres situations



le jeu au service de
la construction des
connaissances

il permet :

- une mise en action de tous
- des échanges oraux
- un questionnement guidé
- des moments de validation





Des outils, du matériel

Vers l'expérience en mathématiques

La bande numérique

OBJECTIFS :

- 1- disposer d'un instrument permettant de lire et d'écrire des nombres dont on ne connaît pas encore par cœur l'écriture chiffrée.
- 2- commencer à imaginer que la suite des nombres se prolonge autant qu'on le veut et, en tout cas, qu'elle ne s'arrête pas avec le dernier nombre connu.
- 3- se construire une bonne image mentale de cette suite, de son organisation et de ses régularités : chaque nombre correspond à une position dans la file.

INTRODUCTION:

comme un dictionnaire et comme une mémoire à l'occasion d'un problème pour lequel elle s'avère nécessaire ou pour permettre à chaque enfant de se rappeler où il en est de sa connaissance de la comptine.

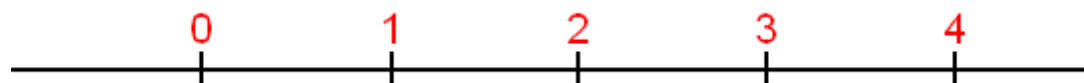
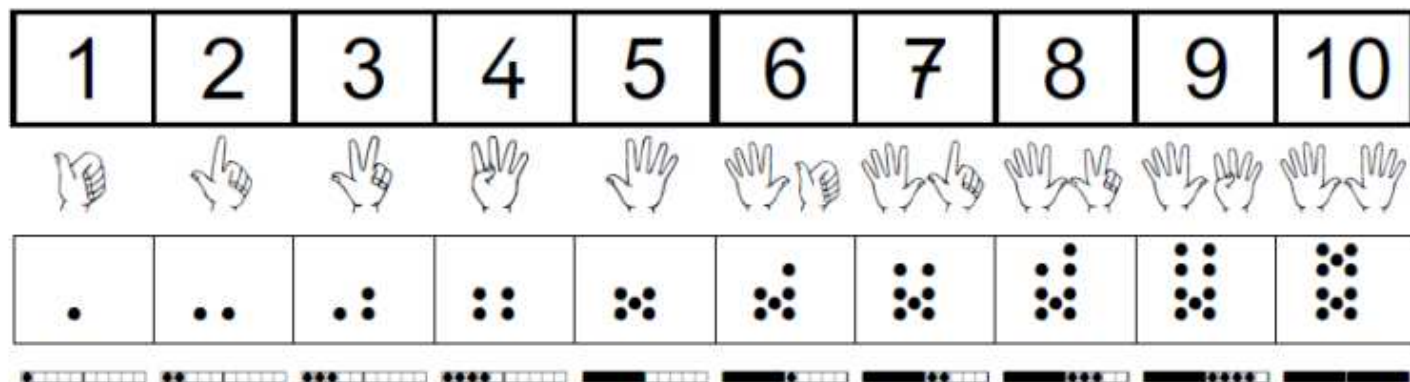
exemples:

- décodage d'une écriture chiffrée reconnue sur la bande par comptage-pointage depuis le début (case 1) jusqu'à la case correspondante.
- recherche de l'écriture chiffrée correspondant à une quantité qu'on veut mémoriser.
- on commence par une bande collective d'abord, puis on introduit les bandes individuelles; on peut adapter la longueur de la bande d'un enfant à sa connaissance de la comptine (elle devient pour l'enfant un instrument de mesure de ses progrès).

UTILISATION

Avec la bande numérique, on peut également :

- observer des régularités.
- visualiser (et donc faciliter le surcomptage).
- visualiser des écarts et élaborer des procédures de calcul de ceux-ci, bien avant de connaître une technique opératoire pour soustraire.
- rechercher et mémoriser des multiples (de 2, de 5, de 10...)



varier, diversifier les représentations de la suite des nombres

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

	10	20	30
1	11	21	31
2	12	22	32
3	13	23	33
4	14	24	34
5	15	25	35
6	16	26	36
7	17	27	37
8	18	28	38
9	19	29	39

des cartes nombres

1	4	3	2
5	6	7	8

9	10	11	12
13	14	15	16

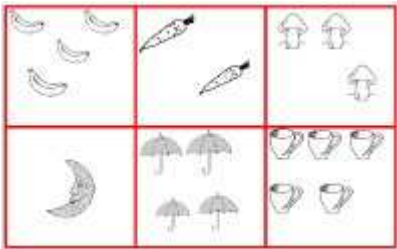
Les jeux de loto

$2 + 2$	$4 + 2$	cinq
2	$5 + 5$	7
8	$7 + 2$	trois

$7 + 0$	$4 + 3$	6
3	quatre	$1 + 1$
5	$4 + 4$	sept

1	$2 + 2$	deux
$4 + 1$	$2 + 6$	7
$3 + 6$	un	$1 + 1 + 1$

$8 + 1$	6	4
7	$4 + 5$	3
5	$2 + 0$	10



Le support proposé dans un jeu de loto est très riche dans les possibilités qu'il offre concernant le travail sur la numération ordinale.

De nombreuses variables didactiques peuvent s'envisager :

- nombre de cases par carton,
- choix du corpus de nombre utilisé,
- dispositif social de jeu,
- règle du jeu variable (exemple : on joue avec un seul carton et une liste de nombres)

Chansons et comptines numériques

Ne pas négliger l'usage des comptines ou chansons, anciennes ou récentes, dans lesquels on trouve des nombres. Elles sont dites pour le plaisir des mots ou des rimes, pour le plaisir de dire dans l'ordre.

On peut faire un choix qui privilégie des variétés dans l'ordre proposé des nombres.

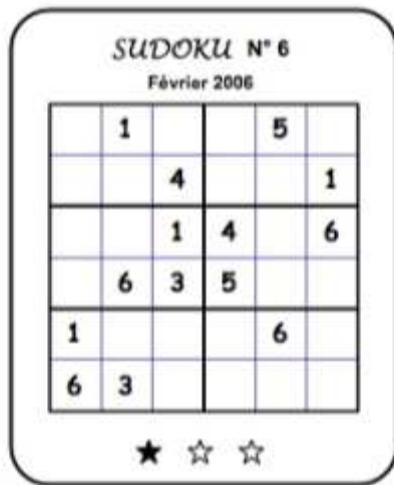
Les calendriers

CALENDRIERS PERPETUELS: ils mettent l'accent sur la suite des nombres, l'écriture du nombre suivant ou du précédent ainsi que l'algorithme des écritures.

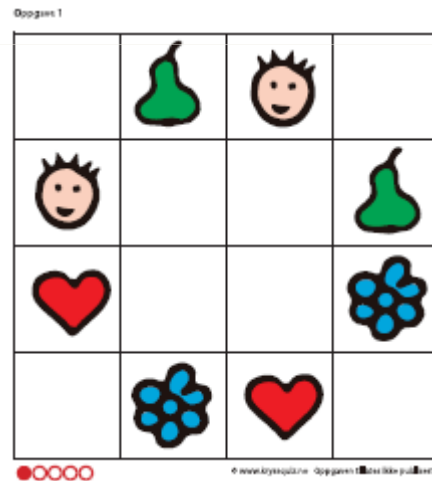
ETIQUETTES: reconstruire la date avec 4 sortes d'étiquettes (nom des jours, nombres de 1 à 31, nom des mois et numéro de l'année) soit en partant de la date de la veille encore affichée, soit en ne partant de rien. Dans le premier cas on travaille l'idée de nombre suivant ou précédent; dans le deuxième cas c'est la mémoire des informations de la veille qui est sollicitée.

EPHEMERIDES: l'aspect quantitatif est privilégié, surtout si les feuilles enlevées sont collées, soit sur une bande chronologique de plus en plus grande (pendant que le paquet de feuilles s'amenuise), soit sur un tableau qui permet d'observer l'organisation des écritures chiffrées des nombres.

Des sudoku



2	1	3						6	
5				1				4	
		9	6		5	1			
9		7	1	4	2	6		5	
	2						7		
6		8	3	9	7	4		1	
		2	7		9	5		8	
3				2				7	
7	9	5					2	1	3



un lien incontournable : http://www.gap.iem.05.ac-aix-marseille.fr/rre/article.php3?id_article=1262

<http://www.earlyyearsresources.co.uk>

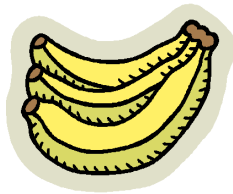


<http://www.oppa-montessori.net>



avant de se quitter,

en devoir pour la semaine prochaine :



Dans un désert de 1000 km, il faut transporter 3000 bananes avec un chameau ne pouvant porter que 1000 bananes sur son dos.

En sachant qu'il consomme 1 banane par km parcouru :

Exemple: 100 km = 100 bananes consommées

Quel est le plus grand nombre de bananes que vous pouvez ramener au bout du désert ?

merci de votre attention



Thierry DIAS, IUFM de LYON

thierry.dias@iufm.univ-lyon1.fr

<http://perso.orange.fr/dias.thierry>



IUFM - Université Claude Bernard Lyon 1

Laboratoire LEPS / LIRDHIST – Université Lyon 1

Laboratoire d'étude du phénomène scientifique
Laboratoire Interdisciplinaire de Recherches
en Didactique et en Histoire des Sciences et Techniques