Quels problèmes pour quelles mathématiques ?

Gérard Gerdil-Margueron Professeur de mathématiques
IUFM de Grenoble - Equipe INRP-ERMEL

Apprendre par la résolution de problèmes / / Apprendre à résoudre des problèmes

La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens.

Dès les premiers apprentissages, les mathématiques doivent être perçues, et donc vécues comme fournissant des moyens, des outils pour anticiper, prévoir et décider.

Documents d'application des programmes 2002 - Sceren-CNDP

Apprendre par la résolution de problèmes / / Apprendre à résoudre des problèmes

- « Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes. Il renforce ses compétences en calcul mental. Il acquiert de nouveaux automatismes. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification. »
- **« La résolution de problèmes** liés à la vie courante permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement. »

Programmes 2008 – cycle 3

Problèmes et automatismes

« Une place particulière est également accordée à la construction des « automattismes », mot qui désigne non pas des procédures apprises sans réflexion, mais au contraire des résultats et des raisonnements construits avec intelligence et progressivement intériorisés. Disponibles en mémoire immédiate, les automatismes donnent à l'élève comme plus tard à l'adulte, les moyens d'une réflexion libre et toujours plus poussée. »

Document ressources « le nombre au cycle 2 » ; Sceren-CNDP

Extrait de la préface par JM Durpaire et M Mégard, Inspecteurs généraux de mathématiques (2010)

Des conceptions sous-jacentes de l ’apprentissage et de l ’enseignement par la résolution de problèmes

- **Point de vue constructiviste sur l ’apprentissage**
- **L ’un des enjeux décisifs de l ’enseignement des maths est que l ’élève donne du sens aux concepts qu ’il rencontre**
- **c ’est à travers des actions finalisées, en résolvant des problèmes que l ’élève prend conscience de l ’insuffisance de ses connaissances et en construit de nouvelles**

  cf Julo : « *c’est dans l’activité de résolution de problème que se trouve la source de la connaissance* »

Des conceptions sous-jacentes de l ’apprentissage et de l ’enseignement par la résolution de problèmes

- **Le nouveau se construit à partir de l ’ancien, en l ’améliorant ou en le rejetant et tout processus d ’apprentissage va donc s ’appuyer sur les connaissances anciennes des élèves**
- **Cela nécessite que :**
  - **l ’élève prenne à sa charge la responsabilité du problème**
  - **la situation proposée permette à l ’élève de valider sa production et sa procédure**

Des conceptions sous-jacentes de l ’apprentissage et de l ’enseignement par la résolution de problèmes

- **Le sens d ’un concept se construit dans deux directions fortement imbriquées :**
  - **le pouvoir que le concept donne à l ’élève pour maîtriser une situation, résoudre des problèmes (aspect outil)**
  - **le pouvoir que l ’élève a sur le concept (aspect objet)**

Quels problèmes ?
Exemples...

Exemple 1 ...Cap Maths CM1

Lecture rapide de la page 29 du manuel

(bref commentaire sur les procédures pour la partie « entretien)

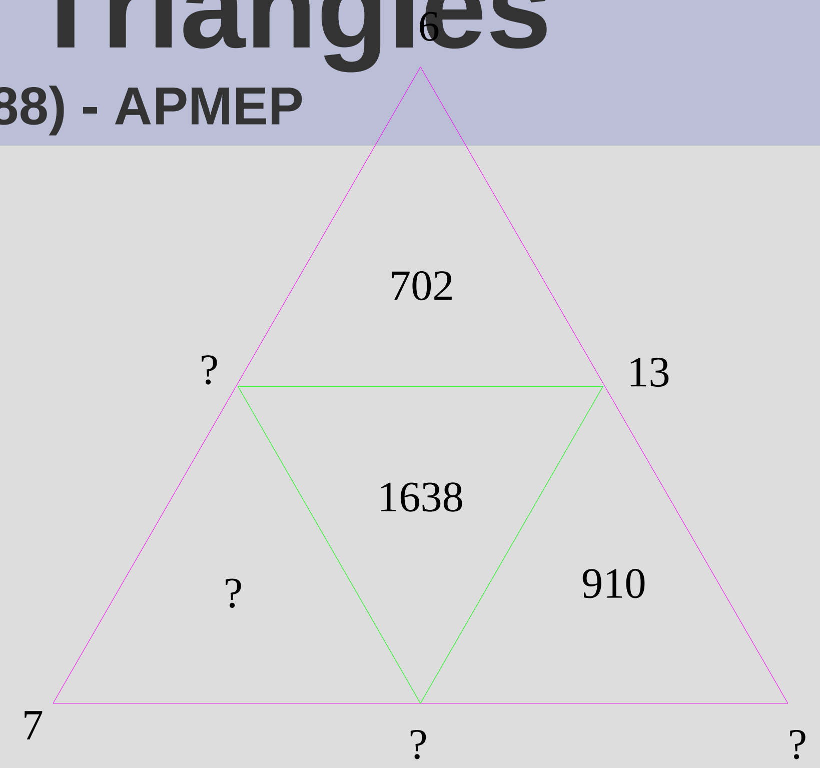
Lecture des pages 30 et 31 du manuel

- activité « entretien » : Durée ? Gestion ? Trace ? Validation ?
- Activité « recherche » : type de problème ? connaissances en jeu ? connaissances initiales nécessaires ? modalités pédagogiques envisagées ? rôle du maître ?
- Exercices : quelle info sur les attendus de la mise en commun apporte la lecture des exercices ? Quelle gestion ? Quelle trace ?

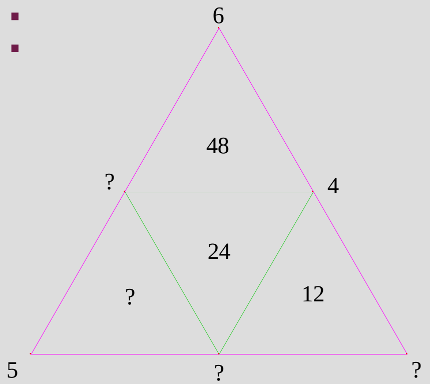
Lecture rapide des pages 76 et 77 du livre du maître. Quelles infos auraient pu permettre de gagner du temps lors de la préparation ?

Exemple 2 : Triangles

Evariste Ecole (n°88) - APMEP



- Le nombre inscrit à l'intérieur d'un petit triangle est le produit des nombres écrits aux trois sommets.
- Complétez :



Exemple 3 : Record…
« Problèmes pour le cycle 3 » (Mosaïque- Hatier)

Le record mondial d’enfants pour une même femme est détenu par Mme Vassiliev, une Russe qui a réussi à donner le jour à :

16 fois des jumeaux, 7 fois des triplés, 4 fois des quadruplés

1. Combien de fois a-t-elle accouché ?
2. A combien d’enfants en tout a-t-elle donné le jour ?
3. Sachant que deux enfants n’ont pas survécu et qu’un bébé boit environ 720 biberons dans les dix premiers mois de sa vie, combien de biberon a-t-il fallu préparer pour tous ces enfants ?

Exemple 4 …: Billets

Pour organiser une sortie au château des Chevaliers, le directeur de l’école achète 45 billets de car à 89 francs le billet. Combien a-t-il dépensé ?

Ermel CE2-période 3

…billets

Cas 1 : La technique est connue, il s’agit d’un simple **problème de réinvestissement** (CE2) dans une série de problèmes multiplicatifs ou dans une série de problèmes additifs ou multiplicatifs ;

Cas 2 : En enjolivant l’histoire pour arriver à un devis avec plusieurs éléments à acheter, un budget à équilibrer, on propose un **problème complexe** avec recours à l’addition, à la soustraction et à la multiplication ; Ce ne sera pas un problème ouvert car le contexte est suffisamment familier pour guider dans la procédure de résolution ;

…billets

- Cas 3: l’élève ne dispose pas de la technique opératoire de la multiplication ;
- C’est une situation-problème qui doit permettre de mettre en place cette technique opératoire :
  - l’élève peut s’engager dans la recherche ;
  - ses connaissances anciennes ne peuvent conduire qu’à des procédures coûteuses et peu sûres ;
  - la connaissance visée est l’outil le plus adapté pour résoudre le problème ;
  - validation : argumentation et si besoin calculatrice

…vidéo

- Visionner la vidéo en observant :
  - Les connaissances dont disposent les élèves ;
  - Les procédures des élèves
  - Le rôle du maître

Billets...connaissances initiales

- Connaissances requises :
  - Numération : valeur d’un chiffre suivant sa position dans le nombre
  - Addition
  - Multiplication : sens de l’opération, répertoire multiplicatif mémorisé, multiplication d’un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre, multiplier un nombre par 10 (règle des zéros)

Retour sur « Billets... »

Procédures initiales...

Groupe 1

```
   4
  8 9
x 4 5
 3 6 5
```

Groupe 3

```
      4 5
 x    8 9     4
    4 0 5
  3 2 0
  3 6 0 5
```

« quand on passe aux dizaines, on ajoute un zéro »

Groupe 4

```
      4
    4 5
x   8 9
    0 5
3 6 4 0
3 6 4 5
```

« 9 fois 5 : 45 ; on pose 5 et on retient 4
9 fois 4 : 36 et 4 : 40 ;
on pose 0 et on retient 4
8 fois 5 : 40 et 4 : 44 ;
on pose 4 et on retient 4
On met un zéro parce qu'on passe aux dizaines
9 fois 4 : 32 et 4 : 36»

Groupe 5

8 9 + 8 9 = 1 7 8 « c'est 2 ; 89 »
1 7 8 + 1 7 8 = 3 5 6 « c'est 4 ; 89 »
3 5 6 + 3 5 6 = 7 1 2 « c'est 8 ; 89 »
7 1 2 + 7 1 2 = 1 4 2 4 « c'est 16 ; 89 »
1 4 2 4 + 1 4 2 4 = 2 8 4 8 « c'est 32 ; 89 »

« pour 45 billets, c'est 2848 + 1424 +178, ça fait 4450 »

Groupe 7

```
   1 0       8 9        8 9 0
x  8 9     x   5    +   8 9 0
 8 9 0     4 4 5    +   8 9 0
                    +   8 9 0
                    +   4 4 5
                      4 0 0 5
```

Vidéo de la seconde mise en commun et observation de l'évolution des procédures sur le même problème (groupe 1)

Billets...procédures possibles

- Essai de procédures uniquement additives mais trop coûteux et abandon
- Essai de technique de multiplication par analogie avec l'addition 5*9 = 45, je pose 5 et je retiens 4 ; 4*3=12 ; 12+4=16 ; réponse 165
- Utilisation des doubles pour trouver le coût de 2 billets, de 4, de 8, de 16, de 32 et utilisation de la décomposition diadique de 45 (45 = 32+8+4+1) et de règles implicites issues du modèle de la proportionnalité
- Utilisation des informations issues de la numération (45 = 4*10 + 5) ; on sait calculer le coût de 10 billets et celui de 5 et on ajoute 390+390+390+390+195 ;
- Utilisation des informations issues de la numération (45 = 4*10 + 5) ; on cherche le coût de 4 paquets de 10 billets et on ajoute 1560+195 (passage progressif par la multiplication par 40)

Billets...phases 2 et plus...

- Que fait-on après cette mise en commun ?
- Quelle évolution des procédures attend- on par un retour au problème ?
- Quelle trace écrite ?
- Quels exercices d’accompagnement ?

Quels problèmes ?

Exemple de typologie

Des problèmes de recherche…

- **Problèmes pour lesquels l’élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée**
  - **Certains sont utilisés pour permettre la construction de connaissances nouvelles ; ce sont les situations-problèmes ;**
  - **D’autres sont davantage destinés à placer l’élève en situation de chercher, d’élaborer une solution originale ; ce sont les problèmes ouverts ;**

Situation-problème

- L’élève doit pouvoir s’engager dans la résolution du problème. L’élève peut envisager ce qu’est une réponse possible du problème.
- Les connaissances anciennes sont en principe insuffisantes pour qu’il résolve immédiatement le problème
- La situation-problème doit permettre à l’élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas
- la connaissance que l’on désire voir acquérir par l’élève doit être l’outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l’élève

(cf Régine Douady)

Problème ouvert

- L’énoncé est court
- L’énoncé n’induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires, ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l’utilisation ou à l’application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ils peuvent ainsi prendre possession de la situation et s’engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples…

(cf Irem de Lyon)

mais aussi ...

- **Des problèmes d’application ou de réinvestissement**, destinés à permettre l’utilisation des acquis antérieurs

- Des problèmes destinés à permettre l’utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des **situations plus complexes**

Une situation-problème en géométrie

Les feuilles qui coulissent... **(Ermel apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 - Hatier)**

- **présentation des objectifs et du dispositif**
- **Procédures possibles ?**
- **Variables didactiques ?**

Les feuilles qui coulissent

Procédures possibles :

- **Tracé du trait sans mettre en jeu le parallélisme même de façon implicite ;**
- **Tracé du trait, au jugé, avec utilisation implicite du parallélisme ;**
- **Tracé du trait par glissement de la règle ;**
- **Tracé du trait avec un ou plusieurs traits intermédiaires ;**
- **Tracé du trait en cherchant même de manière implicite à construire un écart constant entre les deux traits ;**
- **Tracé du trait à l'aide d'un gabarit d'angle construit par pliage**
- **Tracé du trait à partir d'une double perpendicularité instrumentée**

Les feuilles qui coulissent

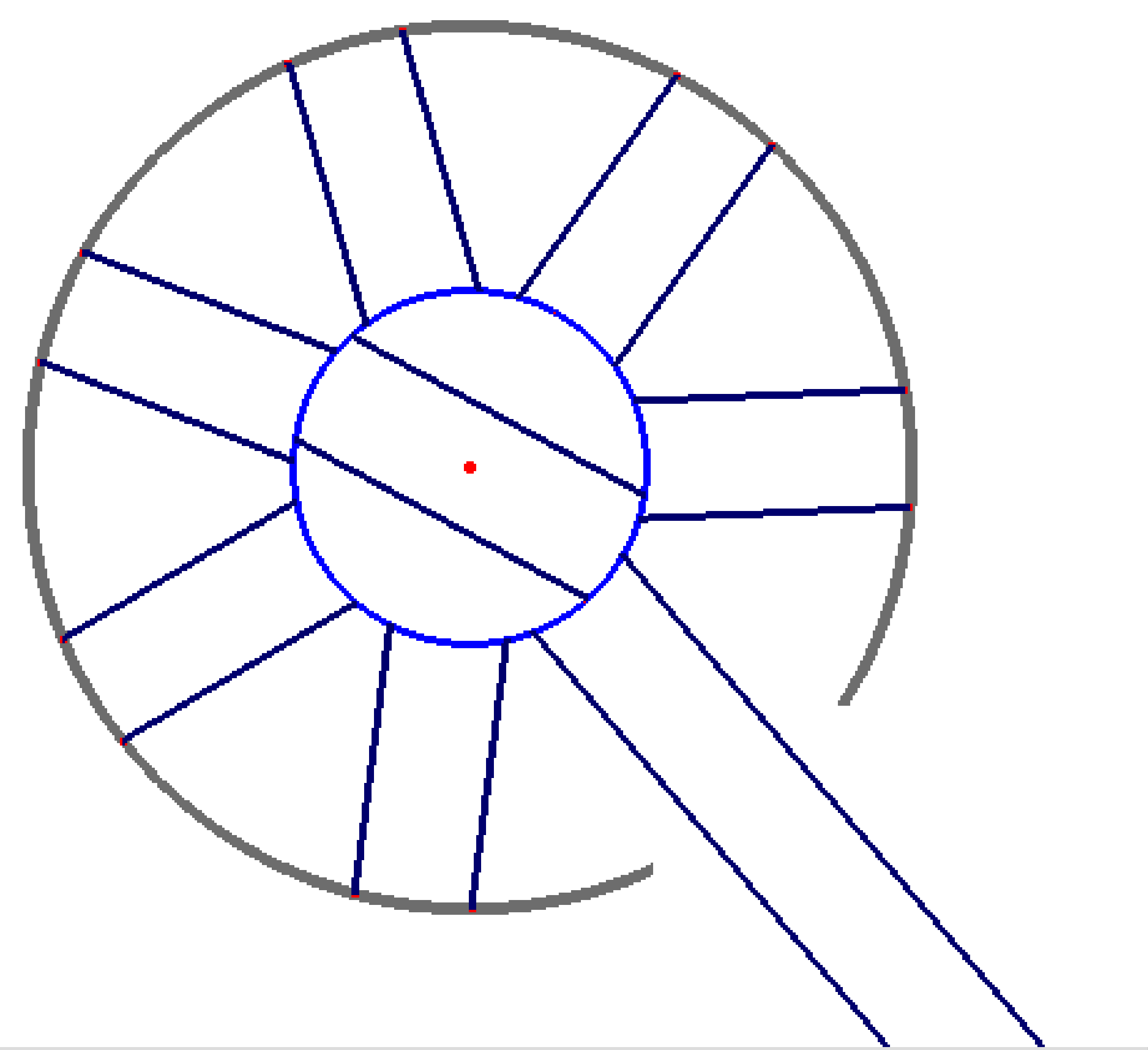
- variables :
  - **Distance entre le point et la droite ;**
  - **Nombre de traits à tracer ;**
  - **Instruments disponibles (règle plate, règle non graduée, équerres, ficelle, papier non quadrillé…)**
- validation :
  - **Pratique immédiate**
  - **Pratique après jugement**
  - **Argumentation rendant la validation pratique inutile**
- langage, trace écrite :
  - **Feuille de traits penchés pareils, feuilles de traits parallèles**

Les feuilles qui coulissent

- Des procédures personnelles aux procédures expertes :
  - **prise d’informations, réalisation par la perception et validation pratique en CE1 ou CE2**
  - **recours attendu au concept de parallélisme, mise en oeuvre de procédures théoriques de production du parallélisme (écart constant) et validation pratique en CM1 ou CM2**
  - **situation évoquée, recours attendu au concept de parallélisme, mise en oeuvre d’axiomes (double perpendicularité) qui permettent de réaliser et sont la base de la validation par argumentation, validation pratique inutile ... au collège**

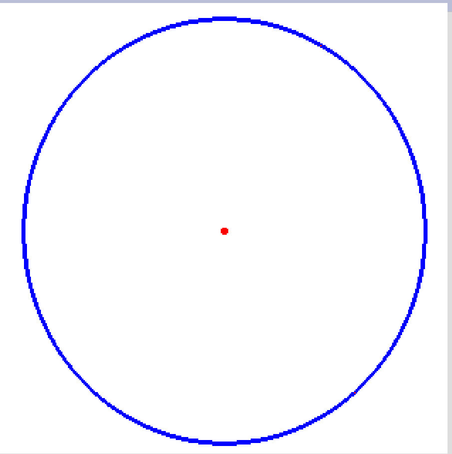
Un problème ouvert en géométrie

- La rotonde
- **(Ermel : Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 - Hatier)**



La Rotonde

- **Problème :**
  - Tracer deux cordes d'un cercle, symétriques par rapport au centre, dont l'écartement est déterminé.
- Validation :
  - Inventaire de toutes les contraintes à respecter pour tracer les segments
  - Insuffisance de la validation pratique et validation par calque



La Rotonde

- **Procédures :**
  - La première droite est placée au jugé, la seconde est placée perceptivement parallèle, en déterminant l'écart au jugé.
  - La première droite est placée au jugé, la seconde est placée en reportant l'écart mesuré sur le dispositif en un seul point et en ajustant perceptivement le parallélisme.
  - La première droite est placée au jugé, la seconde est placée en reportant l'écart mesuré sur le dispositif en deux points (ou en plus de deux points), selon une direction perpendiculaire contrôlée perceptivement.
  - L'élève trace une corde de longueur égale à l'écart puis fait glisser la règle, en essayant de conserver une direction fixe, jusqu'à obtenir une nouvelle corde de même longueur ; il joint ensuite les extrémités correspondantes de ces cordes.
  - L'élève trace une corde de longueur égale à l'écart puis construit une perpendiculaire à cette corde en chacune de ses extrémités (tracé au jugé ou instrumenté).
  - L'élève trace un diamètre puis reporte un demi-écart de chaque côté du centre sur ce diamètre ; il construit ensuite une perpendiculaire en ces deux points (tracé au jugé ou instrumenté).

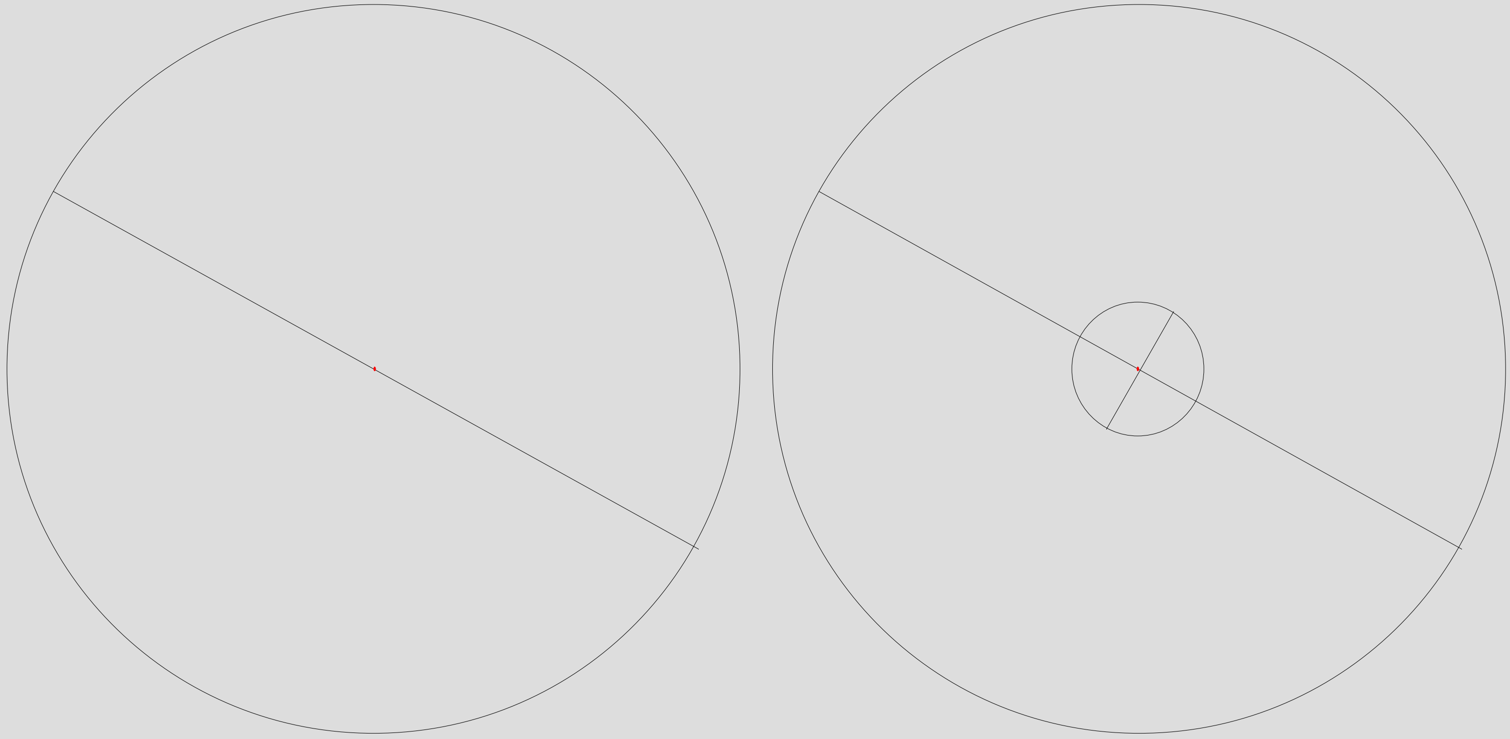
La Rotonde : un texte pour expliquer sa construction

- *Le centre de la plaque tournante est le milieu du segment qui indique l'écart des droites parallèles. Tracer ce segment (5cm). Tracer une droite perpendiculaire aux deux extrémités du segment. Tu obtiendras les rails.*

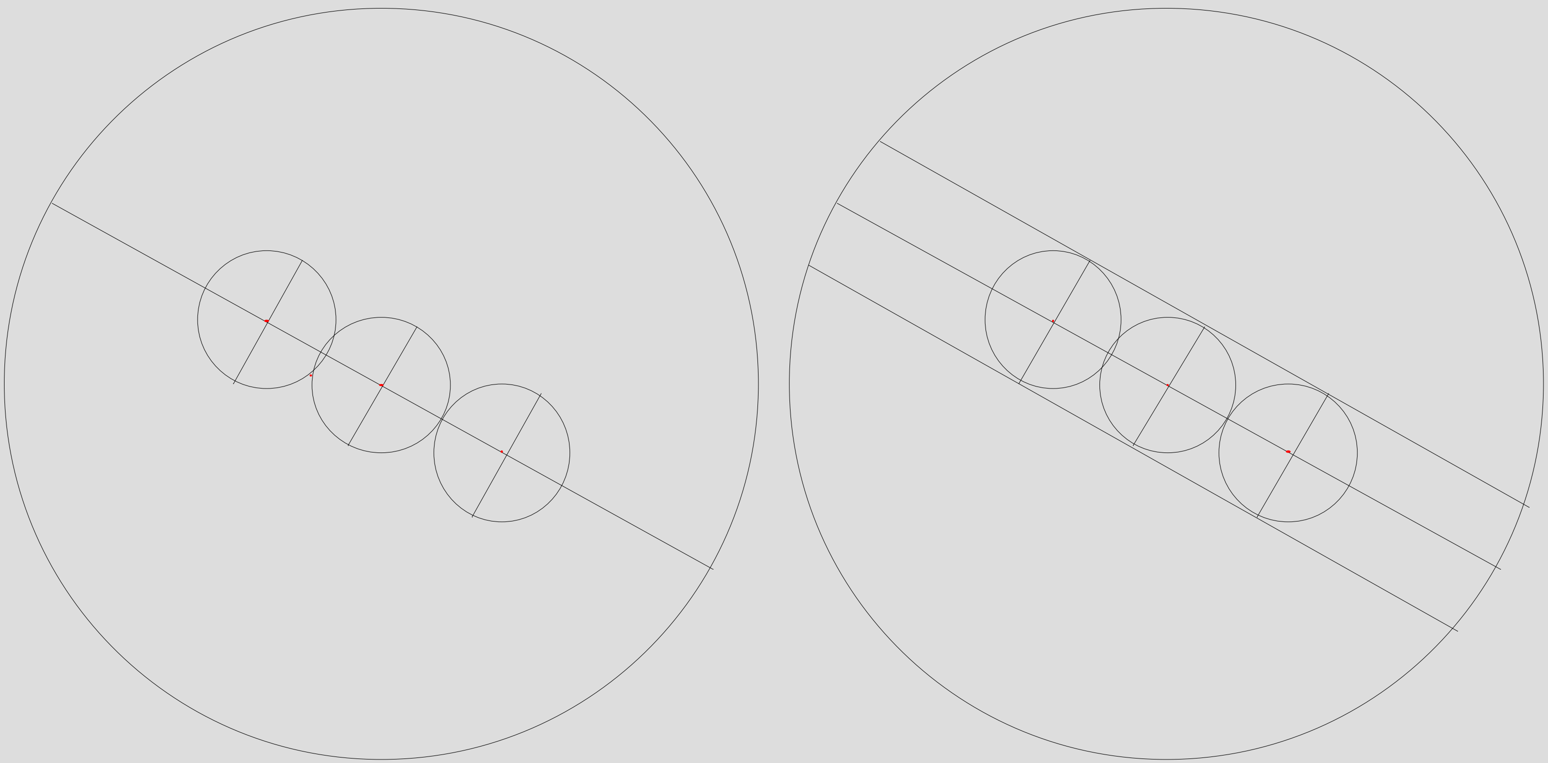
- *Tracer le diamètre du cercle. Tracer des segments de 2,5cm perpendiculaires au diamètre. Tracer les rails de part et d'autre des segments*.

- *Prendre le compas d'un écart de 2,5cm. Tracer un cercle où la pointe du compas est au centre du cercle. Mettre la pointe du compas sur l'intersection du cercle et de la droite et tracer. Idem pour le troisième cercle. Faire pareil de l'autre côté. Tracer une droite qui passe par les extrémités des cercles en prenant le diamètre comme axe de symétrie.*

La Rotonde



La Rotonde



Autre exemple de problème ouvert : Le nez de Pinocchio

- Le nez de Pinocchio a 5 cm de long. Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm. A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.

Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?

Analyse a priori du problème du « nez de Pinocchio »

- Problème du Rallye mathématique transalpin, posé aux élèves d’environ 2000 classes de cycle 3.
- Problème ouvert :
  - Le contexte simple permet aux élèves de se l’approprier facilement.
  - Phrases simples, énoncé bref donc bonne compréhension de la tâche
- L’état initial et l’état final sont donnés et on cherche des éléments des transformations successives, sachant que l’on cannait le nombre de transformations positives mais pas le nombre de transformations négatives, ni leur ordre. C’est là que réside la difficulté essentielle.

Analyse a priori du problème du « nez de Pinocchio »

- Connaissances en jeu ;
- Procédures attendues ;
- Erreurs envisagées ;

Recherche par groupes de 3

Analyse a priori du problème du « nez de Pinocchio »

- Connaissances en jeu :
  - les nombres naturels entre 0 et 26
  - Addition, soustraction, multiplication (répertoire mémorisé dans un champ numérique simple)

Analyse a priori du problème du « nez de Pinocchio »

- Procédures attendues :
  - Utilisation d’une bande numérique avec 7 déplacements de 3 en 3 et retour à 20 dans des déplacements de 2 en 2 ;
  - Essais par déplacements alternés pour arriver à 20 en ayant exactement 7 déplacements de 3 en avant…
  - Pour 7 mensonges le nez s’allonge de 7*3 cm soit 21 donc pourrait atteindre 5 + 21 cm ; comme il mesure 20 cm, il a été raccourci de 6cm ce qui correspond à 3 mensonges (3*2 =6) ; procédure experte très proche du traitement algébrique (5 + 7*3 + X*3 = 20) ; elle nécessite de percevoir que l’ordre des additions ou soustractions n’a aucune importance !
  - Essais de refaire le chemin inverse en repartant de 20 en recherchant des positions intermédiaires (problème car il n’a pu terminer par 7 mensonges…)

Analyse a posteriori du problème du « nez de Pinocchio »

- Réponses correctes :
  - Stratégies arithmétiques :
    - 5cm + 7*3cm = 26 cm puis on enlève les 2cm des vérités jusqu’à ce qu’on arrive à 20 (CE2)
    - 5+3+3+3+3+3+3+3 =26 ; 26-2=24…(CM1)
    - 7*3=21+5=26-20=6 :2=3
  - Stratégies arithmétiques utilisant une représentation
    - En général, représentation d’une bande numérique ou bien représentation d’états successifs du nez

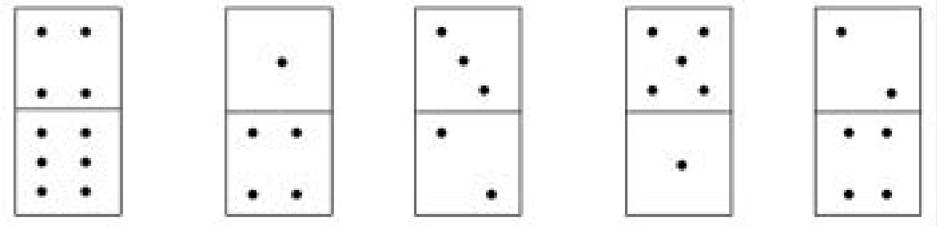
Analyse a posteriori du problème du « nez de Pinocchio »

- Réponses fausses :
  - Utilisation de toutes les données au hasard :
    - **20-7 = 13 ; 13-5=8 ; 13+8 =21 ; 21-1=20 ; donc le total est 13+7=7 (CM1)**
    - **7*5 =35 (mensonges durant toute la journée) ; 35-20=15 ; 15:2=7,5 qui sont les vérités (CM2)**
    - **La priorité des nombres sur les grandeurs qu'ils mesurent amène la perte de toute signification**
  - Prédominance du dernier nombre cité dans l'énoncé :
    - **Nous avons enlevé aux 20cm du nez de Pinocchio à la fin de la journée les 7 mensonges qu'il avait dits et nous avons trouvé 13 comme résultat. Pinocchio a dit 13 vérités (CM1)**
    - **Idée de état final - transformation positive mais quel est l'état initial ?**
  - Conditions d'équilibre après de nombreuses tentatives :
    - **Pinocchio a dit 7 mensonges et a dit la vérité à la fée mais comme il a dit 7 mensonges, il aura dit 7 fois la vérité (CE2)**

Autre exemple de problème ouvert : Les dominos de Nolwenn

rallye mathématique de l'Essonne - cycle 2

- **Nolwenn prend 5 dominos comme ceci :**



- **Elle remarque que la rangée du haut contient 15 points et que la rangée du bas fait 17 points.**
- **Elle veut que les 2 rangées fassent 16 points chacune.**

- **Aide Nolwenn en bougeant le moins de dominos possibles.**
- **Dessine ce que tu as trouvé.**

Problèmes de réinvestissement et problèmes complexes

Voir « Des problèmes pour le cycle 3, les maths un outil pour comprendre le monde » par Dominique Valentin et Michèle Pomme.

Hatier collection Mosaïque (fiches photocopiables)

ISBN : 2-218-73511-3