Mathématiques, série ES

Exemples d'exercices, série ES

Les exercices donnés ici constituent des exemples, leur publication interdit que l'un quelconque d'entre eux fasse partie d'un sujet 2004.

20 novembre 2003

Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche
Direction de l'Enseignement scolaire
eduscol.education.fr/bac

Exercices pour la série ES

Exercice n° 1 (enseignement obligatoire)

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Répondre par VRAI ou par FAUX. Les réponses devront être justifiées, éventuellement par des graphiques.

1- Pour tout réel x de $]0;1]$, $f(x) \leqslant 1$.

2- L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

3- L'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique dans $]0,1[$.

4- La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice n° 2 (enseignement obligatoire)

Dans un lycée qui ne reçoit pas d'interne, la répartition des 895 élèves se fait de la façon suivante :

Niveau :	Seconde	Première	Terminale	Total
Externes	50		85	195
Demi-pensionnaires	285	220		
Total			280	

Rappel de notation : $P_B(A)$ est la probabilité de A sachant que B est réalisé et $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A.

1- Compléter le tableau ci-dessus.

2- On rencontre un élève du lycée au hasard.

On note : E l'événement « l'élève rencontré est externe »,
S l'événement « l'élève rencontré est en seconde »,
et T l'événement « l'élève rencontré est en terminale ».

En supposant que tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés, calculer les probabilités suivantes (*les résultats numériques seront donnés sous forme décimale, arrondie à* 10^{-2}) :

a) $P(E \cap S)$;

b) $P(\overline{E} \cap T)$.

3- a) Les événements E et T sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

b) Citer deux événements incompatibles.

4- Calculer les probabilités conditionnelles suivantes (*les résultats numériques seront donnés sous forme décimale, arrondie au centième*) :

a) $P_S(\overline{E})$;

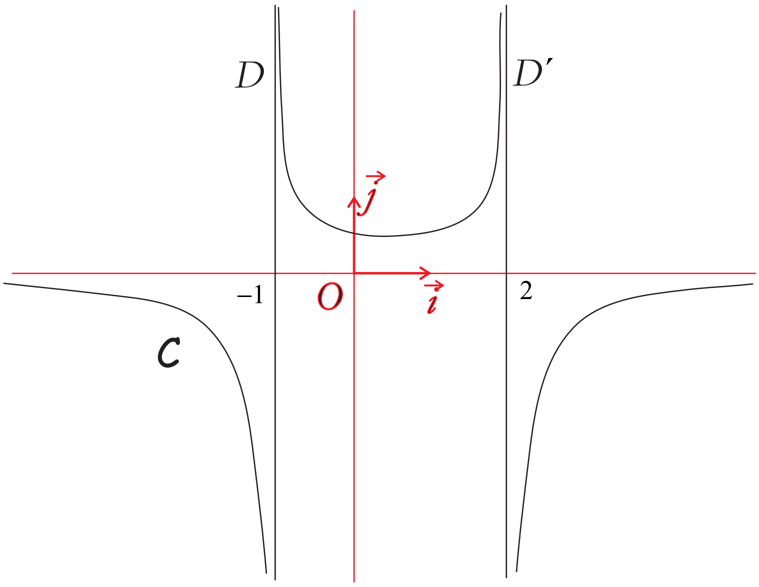
b) $P_E(T)$.

Exercice n° 3 (enseignement obligatoire)

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique $\mathcal{C}$ de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, **en expliquant, à partir des propriétés des fonctions, ce qui vous permet d'éliminer** chacune des deux autres.

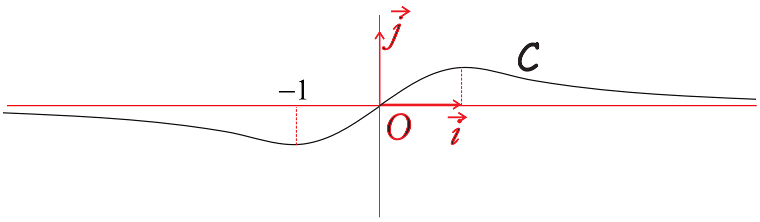
1^er^ cas

$$f_1(x) = -\frac{1}{(x-1)(x+2)} \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} \qquad f_3(x) = -\frac{1}{(x+1)(x-2)}$$



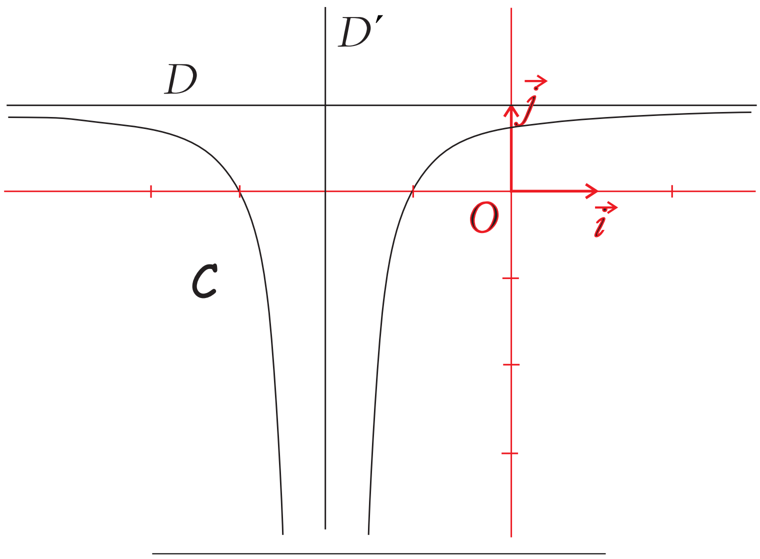
2^e^ cas

$$g_1(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad g_2(x) = x\mathrm{e}^{-x} \qquad g_3(x) = \frac{x}{x^2+1}$$



3^e^ cas

$$h_1(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} \qquad h_2(x) = \ln\big((x+2)^2\big) \qquad h_3(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$



Exercice n° 4 (enseignement obligatoire)

Pour chacune des deux questions suivantes, indépendantes l'une de l'autre, il vous est proposé plusieurs affirmations. Répondre par OUI ou NON à chaque affirmation en cochant la case qui convient.

Notation : une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse en retire un ; la note finale par question ne peut être inférieure à 0.

Question 1

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

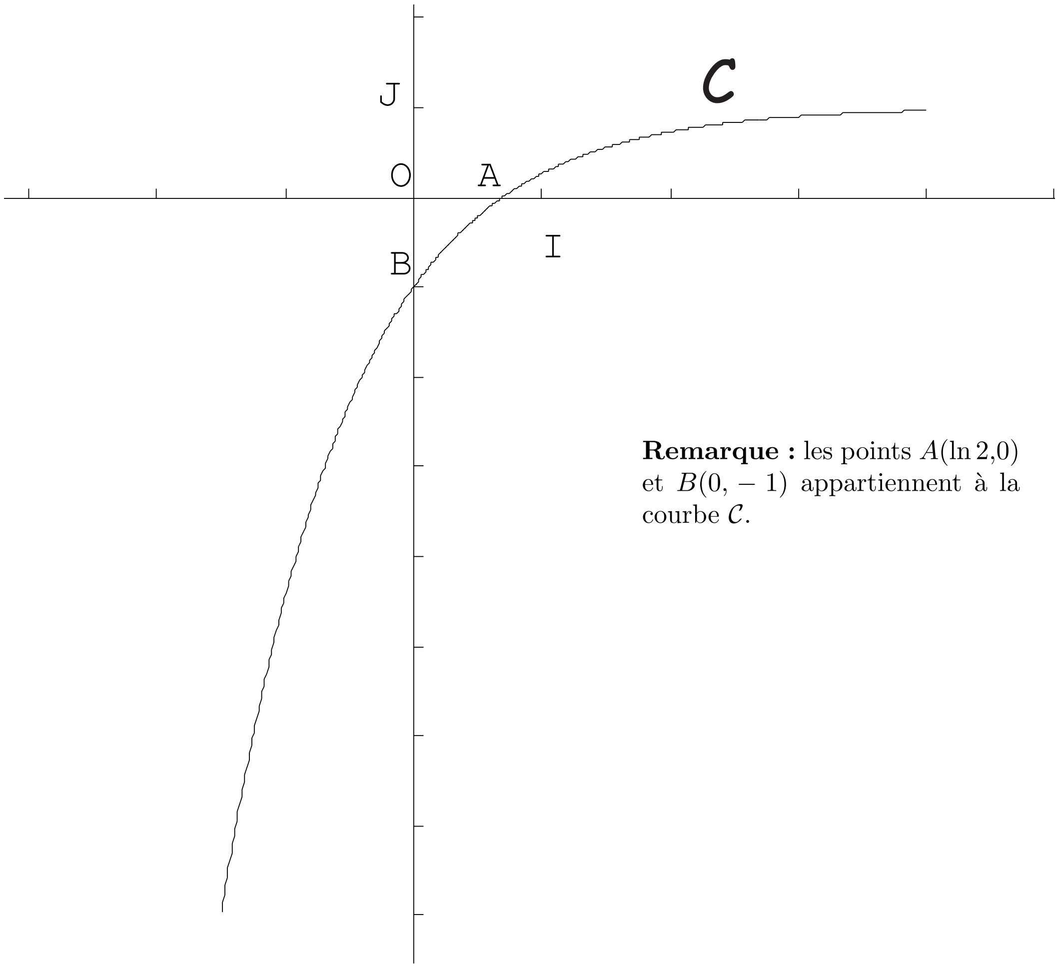
On a donné ci-dessus le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. On appelle $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On peut alors affirmer que :	OUI	NON
la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$		
la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$		
la droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ exactement en deux points		

Question 2

Soit g une fonction dérivable et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On peut alors affirmer que :	OUI	NON
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$		
pour tout x de $]1, +\infty[$, $g(x) > g(1)$		

Exercice n° 5 (enseignement obligatoire)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, 4\right]$. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de **la fonction dérivée f'** de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.



Remarque : les points $A(\ln 2{,}0)$ et $B(0, -1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$.

1- Donner le sens de variation de f sur son ensemble de définition. Justifier la réponse.

La représentation graphique de f est appelée Γ.

2- Déterminer le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse 0.

3- Dans cette question on suppose que $f(\ln 2) = 1$.

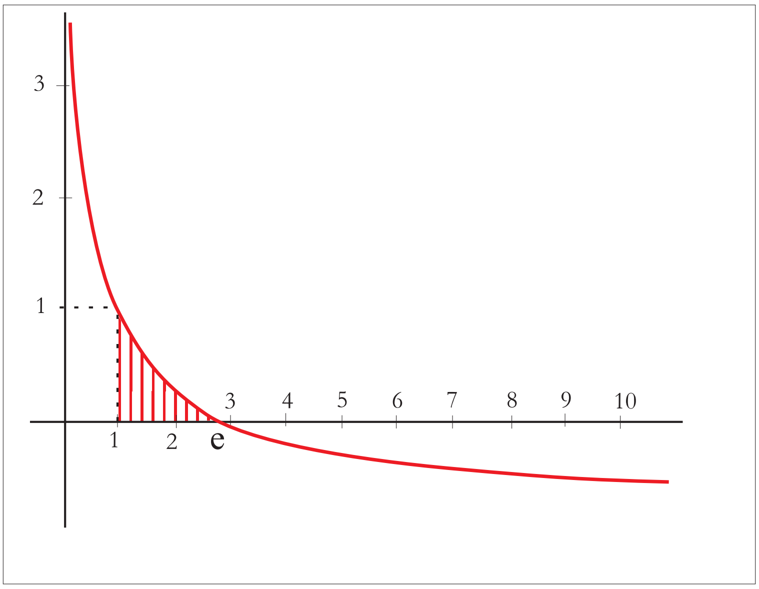
Dire, pour chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse donnée, si elle est vraie, fausse ou si le texte ne permet pas de répondre :

a) la droite d'équation $y = 1$ est tangente à Γ.

b) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, 4\right]$.

Exercice n° 6 (enseignement obligatoire)

La figure ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - \ln x$.



1- Dresser le tableau de signes de la fonction f.

2- Donner les variations d'une fonction F dont f est la dérivée ($F' = f$).

3- L'une des deux fonctions représentées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction dont f est la dérivée.

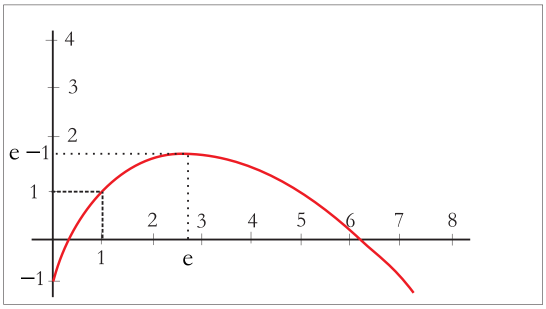


Figure 1

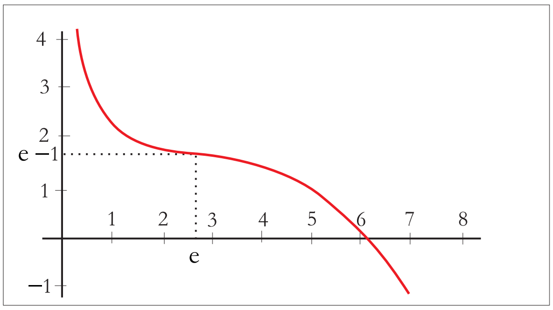


Figure 2

Justifier que la courbe représentée sur la figure 2 ne peut pas convenir.

4- On admet que la courbe représentative de la fonction F est sur la figure 1. Exprimer l'aire du domaine hachuré sur la représentation graphique de f et, en utilisant la figure 1, en donner la valeur exacte.

5- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1 et vérifier que cette droite passe par l'origine du repère.

Exercice n° 7 (enseignement obligatoire)

- *Chaque réponse exacte rapporte 1 point.*
- *Une réponse inexacte enlève 1 point.*
- *Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*
- *Si le total est négatif, il est ramené à zéro.*

À chaque question, répondre en cochant une seule case.

1°	Pour tout x réel, e^{x} est strictement positif.	Vrai	☐
		Faux	☐
2°	Pour tout $x > 0$, $\ln x$ est strictement positif.	Vrai	☐
		Faux	☐
3°	a et b étant des réels quelconques, indiquer parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**.	$\mathrm{e}^{a\times b} = \mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{b}$	☐
		$\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}$	☐
		$\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^{a}}$	☐
4°	Indiquer, parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**.	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$	☐
		$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = -\infty$	☐
5°	Indiquer, parmi les affirmations suivantes, **celle qui est fausse**.	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$	☐
		$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$	☐
6°	L'ensemble des solutions de la double inéquation $-1 < \mathrm{e}^{x} < 8$ est l'intervalle :	$]0, 3\ln 2[$	☐
		$]-\infty, 3\ln 2[$	☐

Exercice n° 8 (enseignement obligatoire)

Le 1er janvier 2002, René a placé 5000 euros à intérêts composés, au taux de 3 %. On note C_n le capital de René au 1er janvier de l'année $2002 + n$.

1- a) Calculer C_1.

b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et en déduire que C_n peut s'écrire :

$$C_n = (1{,}03)^n \times 5000.$$

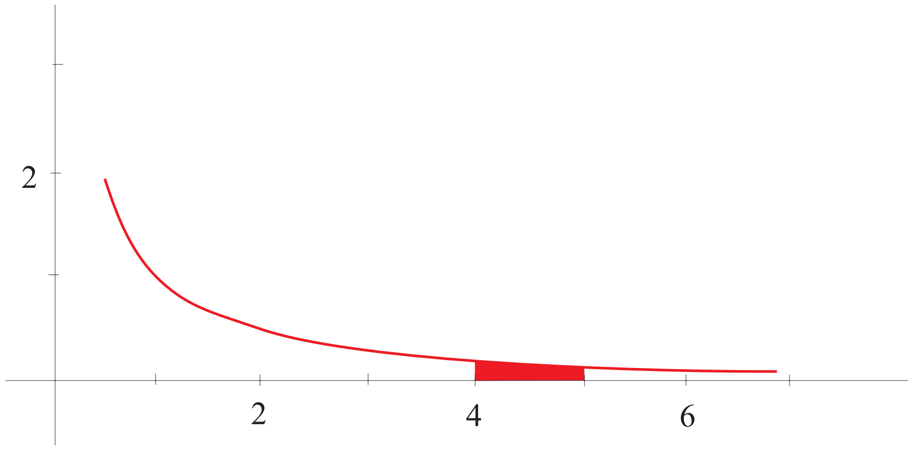
2- a) Au 1er janvier 2010, René aura besoin d'une somme de 7000 euros.

Son capital sera-t-il suffisant pour subvenir à cette dépense ?

b) À quel taux minimal aurait-il dû placer son capital le 1er janvier 2002 pour disposer d'au moins 7000 euros au 1er janvier 2010 ? Arrondir le résultat au dixième.

Exercice n° 9 (spécialité)

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est une partie de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dans un repère orthonormal.



1- Déterminer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré.

2- Soit n un entier naturel strictement positif. On considère u_n l'aire du domaine situé entre les droites d'équations $x = n$, $x = n+1$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$.

a) Montrer que $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3- On pose : $v_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) Déterminer un domaine plan dont l'aire est égale à v_n.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

Exercice n° 10 (spécialité)

Dans un club de football, lors de longues séances de tirs au but, le gardien se comporte de la manière suivante :

- s'il a arrêté un tir, il arrête le suivant avec la probabilité de 0,5 ;
- s'il a encaissé un but, il arrête le tir suivant avec la probabilité de 0,2.

1- a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

b) Donner la matrice de transition de ce graphe.

2- Le gardien n'a pas arrêté le premier tir.

Quelle est la probabilité qu'il arrête le troisième tir ?

Exercice n° 11 (enseignement obligatoire)

Préambule :

Le plan est muni du repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Δ est la droite d'équation $y = \mathrm{e}$ et D est la droite d'équation $y = \mathrm{e}\,x + 3$.

f est une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$;

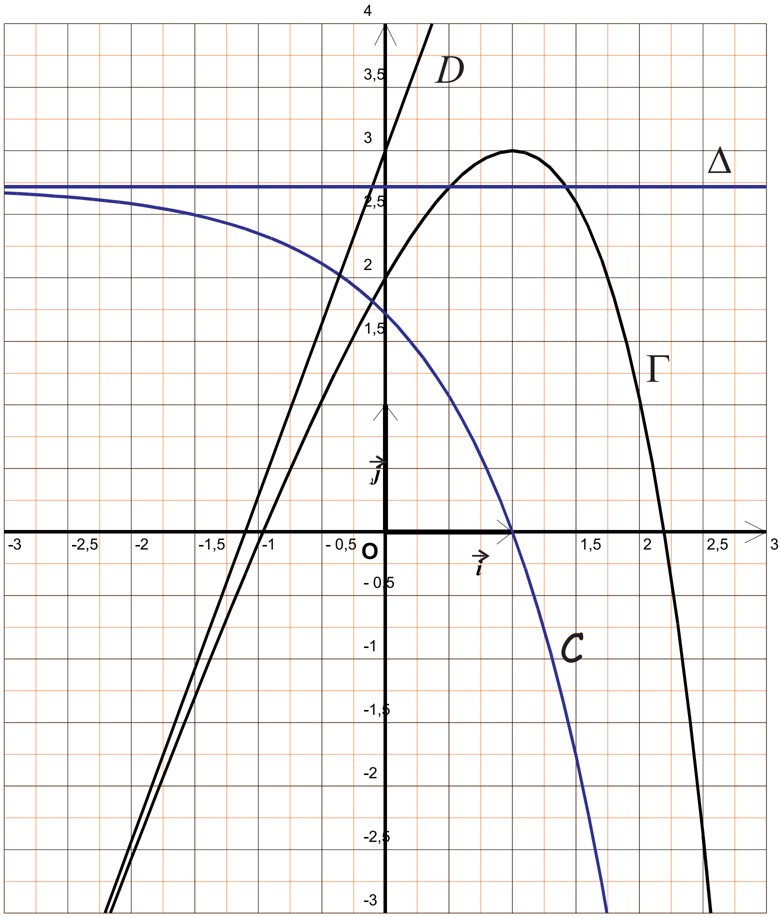
F est une primitive de f sur $\mathbf{R}$;

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f ;

Γ désigne la courbe représentative de la fonction F ;

On donne les cinq informations suivantes :

- $F(0) = 2$;
- Le point $A(1{,}3)$ appartient à Γ ;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{e}$;
- D est asymptote à Γ en $-\infty$;
- F est strictement croissante sur $]-\infty{,}1]$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.



Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A :

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies. Justifier vos réponses à l'aide des cinq informations données en préambule :

1- Δ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

2- f est positive ou nulle sur $]-\infty, 1]$ et négative ou nulle sur $]1, +\infty]$.

3- L'aire de la région du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $4\,\text{cm}^2$.

Partie B :

Un élève affirme avoir trouvé deux fonctions pouvant correspondre aux fonctions f et F présentées en préambule. Ce sont les fonctions g et h définies sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 3 + \mathrm{e}\,x - \mathrm{e}^{x}$ et $h(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{x}$.

1- Quelle est celle qui est susceptible de correspondre à la fonction F ? Justifier.

2- Vérifier qu'il n'y a pas de contradiction avec les cinq informations énoncées en préambule.

Le graphique fourni en préambule peut permettre d'illustrer les justifications proposées.

Exercice n° 12 (enseignement obligatoire)

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1-x}$.

Justifier tous les éléments qui figurent en gras dans le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de f'		**+**	‖	**+**	**0**	**−**	
variation de f	0	↗	$+\infty$ ‖ **$-\infty$**	↗	**$-\mathrm{e}^2$**	↘	**$-\infty$**

Exercice n° 13 (spécialité)

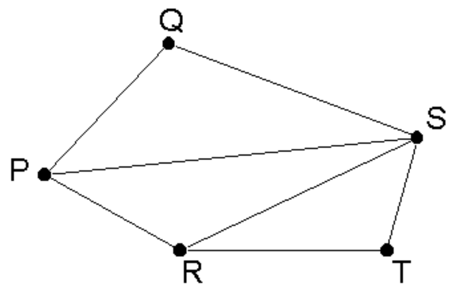
Pour chaque question, cocher une case sur chaque ligne, la case "VRAI" ou la case "FAUX".

- *Une case bien cochée rapporte un demi-point.*
- *Une case mal cochée enlève un demi-point.*
- *Si le total d'une question est négatif, il est ramené à zéro.*

Question 1

On rappelle qu'une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe.
Dans le graphe ci-contre, il est possible de définir une chaîne eulérienne :

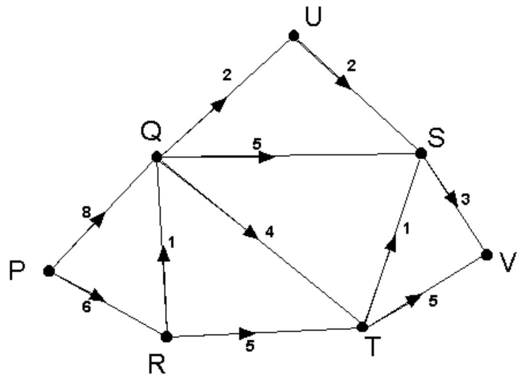
	VRAI	FAUX
partant de Q et finissant en T	☐	☐
partant de S et finissant en S	☐	☐
partant de P et finissant en R	☐	☐



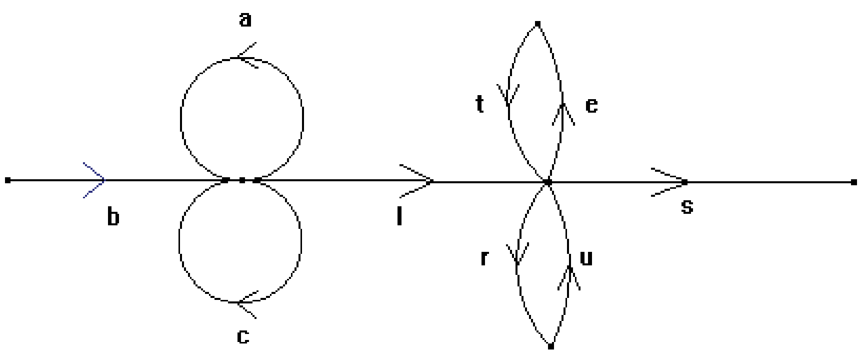
Question 2

Dans le graphe pondéré ci-contre, la plus courte chaîne pour aller de P à V

VRAI	FAUX	
☐	☐	a pour poids 16
☐	☐	a pour poids 14
☐	☐	contient la chaîne P-R-T



Question 3



Le graphe étiqueté ci-dessus permet de reconnaître des mots (un mot est une suite finie de lettres, n'ayant pas forcément un sens).

VRAI	FAUX	
☐	☐	il reconnaît le mot "baccalets"
☐	☐	il reconnaît tous les mots commençant par "bac"
☐	☐	il reconnaît le mot "bleus"
☐	☐	il reconnaît exactement six mots de cinq lettres

Exercice n° 14 (spécialité)

On considère la fonction f des variables réelles x et y définie par : $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2y^2 + 5xy$.

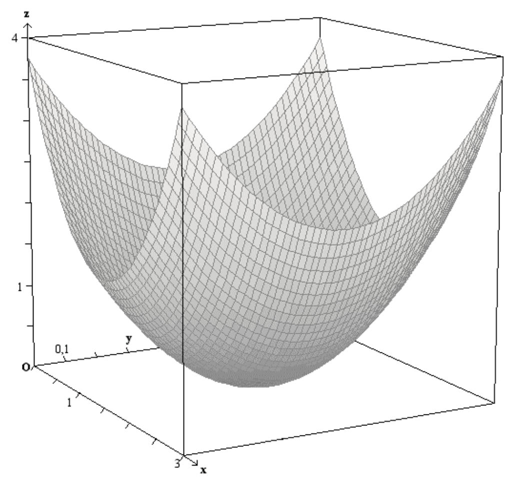
La surface S est la représentation graphique de la fonction f dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\right)$.

1- Répondre, par VRAI ou FAUX, aux affirmations suivantes, en justifiant votre réponse.

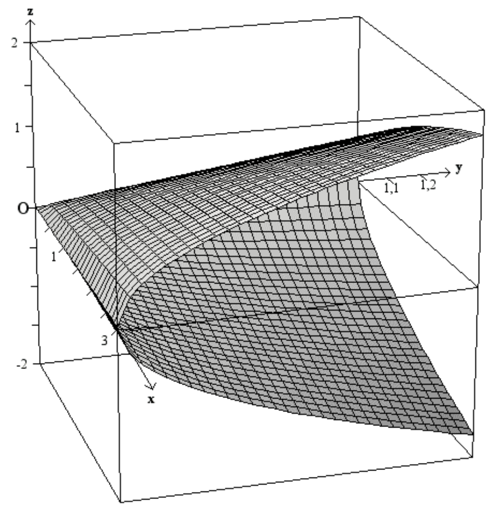
Affirmation 1	La surface S contient l'origine O du repère
Affirmation 2	La surface S contient le point $A(0, 1, 2)$
Affirmation 3	La surface S contient la demi-droite $[Ox)$
Affirmation 4	La surface S contient la demi-droite $[Oy)$

2- La représentation graphique de S pour $x \in [0, 3]$ et $y \in [0, 1]$ figure parmi les quatre représentations graphiques ci-dessous. La déterminer en justifiant votre choix.

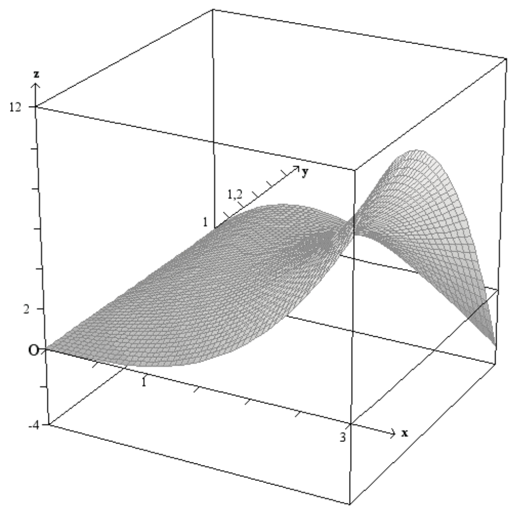
Représentation 1



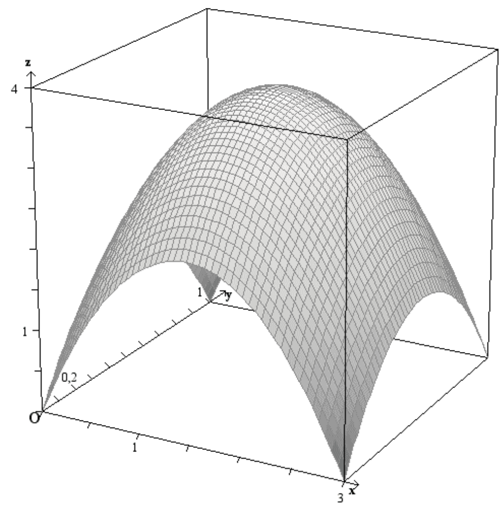
Représentation 2



Représentation 3



Représentation 4



Exercice n° 15 (enseignement obligatoire)

Partie A

L'évolution de la population d'une région entre 1950 et 1990 a permis de construire le tableau suivant :

Année X_i	1950	1960	1970	1980	1990
x_i					
Population y_i en millions	2,5	3	3,6	4,4	5,2

1- Lorsque X_i désigne le numéro de l'année, on pose $x_i = \dfrac{X_i - 1900}{10}\cdot$ Une décennie correspond alors à une unité. Compléter la seconde ligne du tableau.

2- Construire, à l'aide de ces données, le nuage des points de coordonnées (x_i,y_i). Les unités graphiques seront de 1cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et de 2cm pour 1 million sur l'axe des ordonnées.

3- En première approximation, on peut envisager de représenter la population y comme une fonction affine de l'année x.

a) Expliquer pourquoi les accroissements absolus devraient être constants tous les 10 ans.

b) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés.

c) Quelle prévision ferait-on avec cette approximation pour la population de la région en l'an 2000 ?

Partie B

En 2000, la population a été en réalité de 6,2 millions. Les démographes intéressés par l'évolution de cette population ont alors modifié l'ajustement du nuage en tenant compte du fait que **l'accroissement relatif** de cette population est presque constant d'une décennie à l'autre.

1- Vérifier que, pour les valeurs données, cet accroissement est voisin de 20 %.

2- Expliquer pourquoi la fonction $f : x \mapsto 1{,}2^x$ peut être utilisée pour modéliser plus précisément l'évolution de la population étudiée.

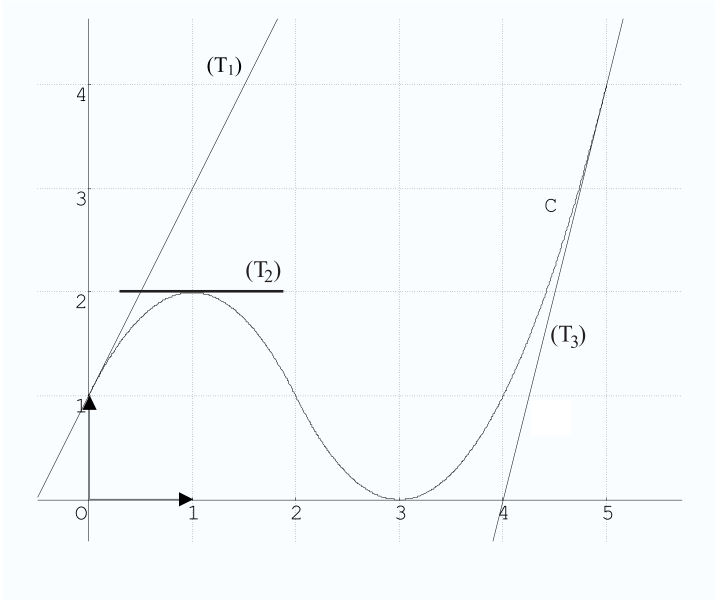
3- En utilisant cette modélisation, quelle prévision peut-on faire pour 2005 ? Quelle aurait été la prévision faite à l'aide de la première approximation ?

Exercice n° 16 (enseignement obligatoire)

La courbe C donnée dans la figure ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0,5].

Cette courbe est tracée dans un repère orthonormal.

On a représenté également les tangentes (T_1) (T_2) et (T_3) aux points de C d'abscisses respectives 0, 1 et 5.



Partie A

Dans cette partie, les réponses seront obtenues par lecture graphique. Les résultats des questions 1 et 2 sont des nombres entiers. Par exemple la lecture graphique donne $f(2) = 1$.

1- Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.

2- Déterminer les valeurs de $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(5)$.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Soit $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après le graphique, quel est l'encadrement correct parmi les propositions suivantes ?

a) $2 \leqslant I \leqslant 3$ b) $3 \leqslant I \leqslant 4$ c) $4 \leqslant I \leqslant 5$

Partie B

La notation ln désigne la fonction logarithme népérien.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0,3[$ par $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$.

1- Donner les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

2- Déterminer $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

3- Déterminer les valeurs de $g'(0)$ et $g'(1)$.

4- Dresser le tableau de variation de g.

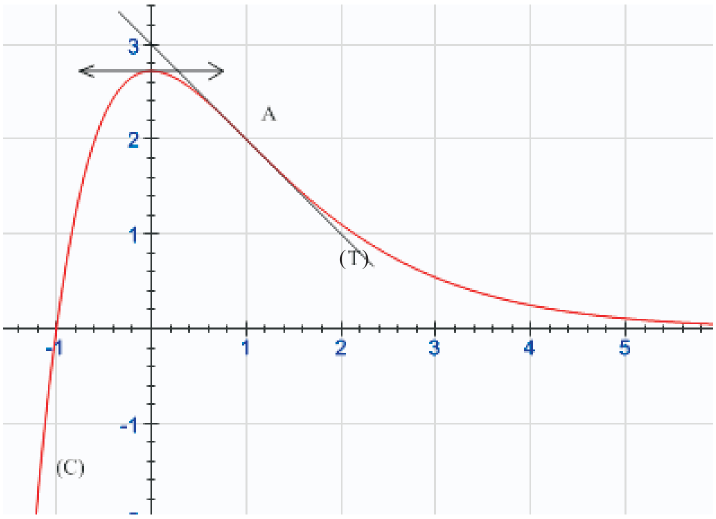
5- Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,)$, proposer un tracé de courbe représentant g en tenant compte des résultats de la partie B.

Exercice n° 17 (enseignement obligatoire)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées. Une et une seule est exacte. **On demande de l'entourer**.

Notation : *À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié des points affectés. Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.*

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.



Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

Question 1

D'après la courbe ci-dessus,

a. $f(0) = 0$

b. $f'(0) = \mathrm{e}$

c. $f'(0) = 0$

d. $f(e) = 0$

Question 2

D'après la courbe ci-dessus, le coefficient directeur de la droite (T) est égal à :

a. 0

b. 1

c. -1

d. -2

Question 3

D'après la courbe ci-dessus,

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

c. $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Question 4

D'après la courbe ci-dessus, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

a. égale à 3

b. strictement supérieure à 3

c. négative

d. inférieure à 3

Exercice n° 18 (enseignement obligatoire)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 100(2x-5)\mathrm{e}^{-x}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A - Étude de la fonction f

1- Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra écrire $f(x) = 100\left(\dfrac{2x}{\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{5}{\mathrm{e}^{x}}\right)$ et on rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$).

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2- Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

3- Construire la courbe C_f sur l'intervalle $[2, 8]$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ dont les unités sont :

2 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

Partie B - Calcul d'une intégrale

1- Justifier que la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = 100(-2x+3)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2- Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C - Application

Le nombre $f(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces (pour x compris entre 2 et 8). Par exemple, si l'entreprise fabrique 300 pièces, elle réalise un bénéfice de $1000\,f(3)$ euros.

1- En utilisant si nécessaire la courbe C_f ou les résultats de la partie A, déterminer en justifiant :

a) Les quantités à produire pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.

b) La quantité de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Préciser ce bénéfice à l'euro près.

c) Les quantités de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 5000 euros.

2- Lorsque la production varie entre 300 et 600 pièces, le bénéfice moyen en milliers d'euros est donné par la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[3, 6]$. Déterminer une valeur approchée, arrondie à un euro près, de ce bénéfice moyen.

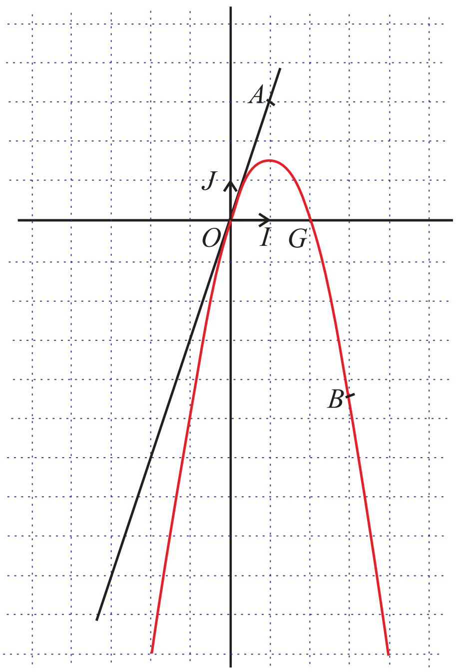
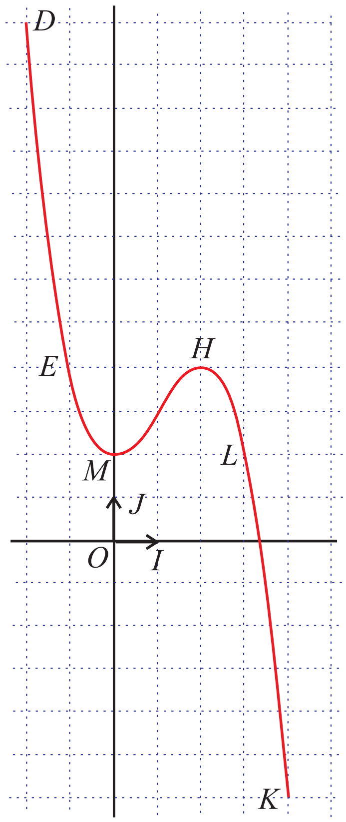
Exercice n° 19 (enseignement obligatoire)

Pour chacune des affirmations suivantes, numérotées de 1 à 8, dire si elle est vraie ou fausse, sans justification.

À chaque affirmation est affecté un nombre de points :
- *une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ;*
- *une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés ;*
- *une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève rien.*

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Soient f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ et F une primitive de f sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.
Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f dans le plan (P).	La courbe (Γ) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction F dans le plan (P).
 **On précise que les points $B\,(3\,;\,-4{,}5)$, $O\,(0\,;\,0)$ et $G\,(2\,;\,0)$ sont des points de la courbe (C) et que la droite (OA) est tangente en O à la courbe (C) où $A\,(1\,;\,3)$.**	 **On précise que les points $D\,(-2\,;\,12)$; $E\,(-1\,;\,4)$; $M\,(0\,;\,2)$; $H\,(2\,;\,4)$; $K\,(4\,;\,-6)$; $L\,(3\,;\,2)$ sont des points de la courbe (Γ).**

1- La courbe (C) est la courbe représentative de la fonction dérivée de la fonction F.

2- $f'(0) = -3$.

3- $F'(2) = 0$.

4- La fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

5- La fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

6- Le coefficient directeur de la tangente en L à la courbe (Γ) est -4.

7- On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan (P) délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$. On a $\mathcal{A} = 1$.

8- $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -11$.

Exercice n° 20 (enseignement obligatoire)

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 €.

Au vu de son expérience le commercial estime que :

- la probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à 0,25 ;

- si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;

- si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25.

1- On note A l'événement : « le premier client achète le produit ».

On note B l'événement : « le deuxième client achète le produit ».

Calculer la probabilité de l'événement B.

2- Quelle est la probabilité qu'un seul des clients conclue l'achat ?

3- Le commercial perçoit 15 % sur le total de sa vente.

a) Établir la loi de probabilité associée au gain de la journée.

b) Quelle est l'espérance mathématique du gain ?

4- Que doit être le pourcentage de sa commission pour que cette espérance dépasse 60 € ? (on donnera le résultat arrondi au dixième).

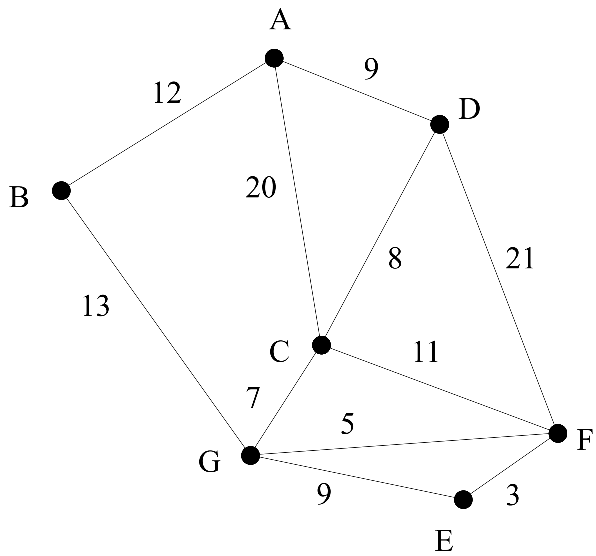
Exercice n° 21 (spécialité)

Des touristes sont logés dans un hôtel noté A.

Un guide fait visiter six sites touristiques notés B, C, D, E, F et G.

Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous.

Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1- a) À partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ? Justifier la réponse.

b) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

2- Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E. Justifier la réponse.

Exercice n° 22 (enseignement obligatoire)

Un assembleur d'ordinateurs a équipé chacun d'eux d'une carte mère de marque, soit Élite, soit Futura. 35 % des ordinateurs sont équipés de cartes mères Élite.

Il a aussi muni chacun d'eux d'un processeur choisi parmi trois références : Premium, P20, et P30.

- 60 % des ordinateurs équipés de cartes mères Élite sont munis d'un processeur Premium et 30 % d'un processeur P20.

- 30 % des ordinateurs équipés de cartes mères Futura sont munis d'un processeur Premium et 20 % d'un processeur P20.

On teste au hasard un ordinateur chez cet assembleur : tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être testés.

On considère les événements suivants :

E : « L'ordinateur est équipé d'une carte mère Élite »

F : « L'ordinateur est équipé d'une carte mère Futura »

P_1 : « L'ordinateur est équipé d'un processeur Premium »

P_2 : « L'ordinateur est équipé d'un processeur P20 »

P_3 : « L'ordinateur est équipé d'un processeur P30 »

1- Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

Dans les questions suivantes, les résultats des calculs seront arrondis au millième.

2- a) Déterminer la probabilité de l'événement $F \cap P_1$.

b) Déterminer la probabilité de l'événement P_1.

c) On teste au hasard un ordinateur équipé du processeur Premium. Quelle est la probabilité qu'il soit muni de la carte mère Futura ?

3- L'assembleur gagne 450 € sur un ordinateur équipé du processeur Premium, 250 € sur un modèle équipé du processeur P20 et 120 € sur un modèle équipé du processeur P30.

a) Déterminer la loi de probabilité du gain de l'assembleur.

b) Déterminer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter le résultat.

Exercice n° 23 (spécialité)

Une grande entreprise propose à ses employés deux types d'horaires mensuels, fixes ou variables. Chaque trimestre, tous les employés sont consultés sur le type d'horaire qu'ils désirent adopter au trimestre suivant.

Au début de l'expérience, 60 % des employés sont favorables aux horaires fixes. Autrement dit l'état probabiliste initial est décrit par la matrice ligne $P_0 = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$.

On estime qu'un employé préférant les horaires fixes un trimestre donné garde sept fois sur dix le même avis au trimestre suivant, alors qu'un employé préférant les horaires variables change d'avis une fois sur cinq au trimestre suivant.

On suppose que les effets des changements de personnel dans l'entreprise sont négligeables.

1- Traduire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

2- On admet que la matrice de transition M de ce graphe est égale à $\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$.

a) Donner l'état probabiliste deux trimestres après le début de l'expérience et interpréter le résultat obtenu.

b) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

Exercice n° 24 (spécialité)

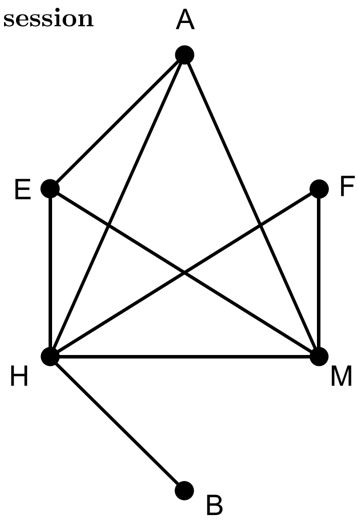
Cinq étudiants, Xavier, Yann, Wanda, Valérie, et Zoé, ont à passer un examen avec quelques épreuves écrites.

Pour chaque étudiant voici la liste des épreuves écrites qu'il doit passer :

Xavier :	Anglais, Espagnol, Histoire ;
Yann :	Français, Histoire, Mathématiques ;
Wanda :	Biologie, Histoire ;
Valérie :	Anglais, Espagnol, Mathématiques ;
Zoé :	Espagnol, Histoire, Mathématiques.

Chaque épreuve dure une demi-journée. **On cherche à organiser la session d'examen afin qu'elle dure le moins de demi-journées possibles.**

Pour cela on a représenté la situation par le graphe ci-contre ; chaque sommet du graphe correspond à l'initiale d'une matière : A pour Anglais, B pour Biologie, E pour Espagnol, etc.



1- Expliquer à quoi correspond chaque arête de ce graphe.

2- Expliquer comment traduire le problème posé par un problème de coloriage de ce graphe.

3- Proposer un coloriage de ce graphe permettant de minimiser le nombre de couleurs.

4- Quel est le nombre chromatique de ce graphe ?

5- Proposer une organisation de la session d'examen en un minimum de demi-journées.

Exercice n° 25 (enseignement obligatoire)

Deux magasins M_1 et M_2 d'une même firme ont respectivement besoin, chaque semaine, de 100 kg et de 120 kg d'un même produit. Ils achètent ce produit à deux usines U_1 et U_2 qui en fabriquent respectivement 130 kg et 90 kg par semaine. On observe que l'offre est égale à la demande.

Les coûts du kilogramme de ce produit, achat et transport compris, sont respectivement :

- de U_1 à M_1 : 60 € ;
- de U_1 à M_2 : 30 € ;
- de U_2 à M_1 : 40 € ;
- de U_2 à M_2 : 20 €.

La firme veut déterminer une politique d'approvisionnement optimale, c'est-à-dire au moindre coût.

On désignera par x, y, z et t les quantités respectives en kilogrammes de produit allant respectivement de U_1 à M_1, de U_1 à M_2, de U_2 à M_1 et de U_2 à M_2.

1- Écrire, en les justifiant, les quatre équations qui expriment que la demande des magasins est satisfaite et que les usines vendent complètement leur production.

Montrer que y, z et t s'expriment en fonction de x seul.

2- Les quantités x, y, z, t étant positives ou nulles, montrer que x appartient à l'intervalle $[10, 100]$.

3- Exprimer le coût total de l'approvisionnement $f(x)$ en fonction de x.

Déterminer le minimum de ce coût pour x appartenant à l'intervalle $[10, 100]$.

En déduire comment se fera alors l'approvisionnement optimal des magasins M_1 et M_2.

Exercice n° 26 (spécialité)

On désire transporter sept produits chimiques par chemin de fer.

Pour des problèmes de sécurité, certains de ces produits ne peuvent pas être transportés dans le même wagon, ils sont considérés comme incompatibles. L'objectif de cet exercice consiste à rechercher une répartition des produits qui utilise un nombre minimal de wagons.

On donne ci-contre le tableau d'incompatibilité entre ces sept produits, désignés par les lettres A, B, C, D, E, F et G :

Ce tableau signifie, par exemple, que les produits C et D ne peuvent pas être transportés dans un même wagon.

	A	B	C	D	E	F	G
A		×			×	×	
B	×				×	×	×
C				×	×	×	
D			×		×		×
E	×	×	×	×		×	
F	×	×	×		×		
G		×		×			

1- Parmi les trois graphes proposés en annexe ci-dessous, quel est celui qui représente cette situation ? Justifier ce choix.

Par la suite ce graphe sera noté (Γ).

2- Donner un sous-graphe complet d'ordre maximal.

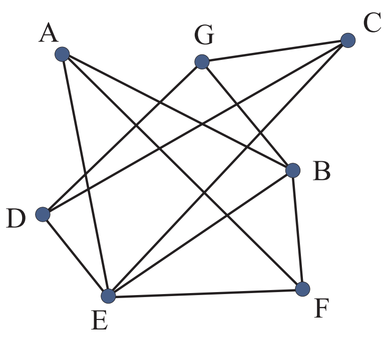
3- a) Colorier le graphe (Γ) et déterminer son nombre chromatique en justifiant la valeur trouvée.

b) Indiquer une répartition possible de ces produits qui permette d'utiliser un nombre minimal de wagons pour assurer leur transport.

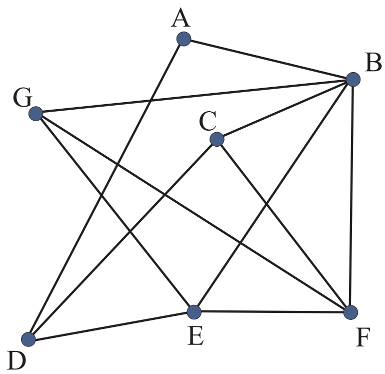
c) Quel est alors le nombre maximum de produits pouvant être transportés dans un même wagon ?

ANNEXE

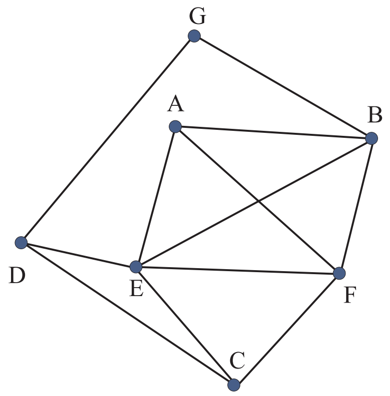
Graphe 1 :



Graphe 2 :



Graphe 3 :



Exercice n° 27 (spécialité)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK}\right)$. Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est tel que : $B(2,0,0)$, $D(0,6,0)$, $E(0,0,4)$. Les points L et M sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FB]$.

1- Placer les points L et M sur la figure ci-dessous. Donner (sans justification) les coordonnées des points A,C,F,G,H, puis vérifier par le calcul que les points L et M ont respectivement pour coordonnées $(1,0,4)$ et $(2,0,2)$.

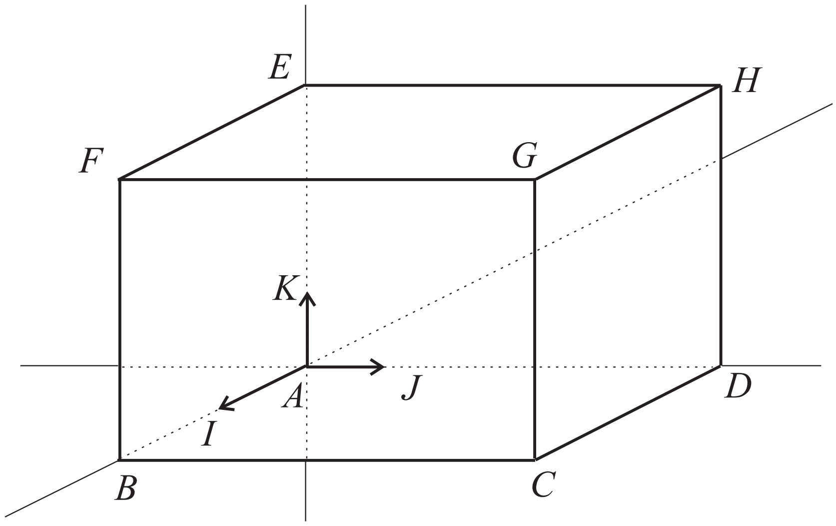
2- Soit (P_1) le plan d'équation : $y=0$ et (P_2) le plan d'équation $2x+z=6$.

a) Montrer que (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles.

b) Soit (Δ) l'intersection des deux plans (P_1) et (P_2). Montrer que (Δ) est la droite (ML).

c) Justifier que le plan (P_2) est parallèle à l'axe $\left(A,\overrightarrow{AJ}\right)$.

d) Tracer en rouge sur la figure l'intersection de (P_2) avec le pavé $ABCDEFGH$. **On ne demande pas de justifier cette construction**.



Exercice n° 28 (enseignement obligatoire)

Une société de crédit propose à ses clients de mettre à leur disposition une somme s de 6000 € remboursable par des prélèvements mensuels fixes de 300 €. Le taux d'intérêt mensuel annoncé est 1,5 %. On se propose de déterminer le nombre de mois nécessaires au remboursement de cette somme et le montant effectivement payé par chaque client. Si le montant dû le dernier mois est inférieur à 300 €, le client paye le forfait de 300 €.

On pose $u_0 = 6000$ et on appelle u_n le montant restant à rembourser après n prélèvements mensuels.

1- Montrer que $u_1 = 6000 \times 1{,}015 - 300$. Calculer u_1 puis u_2.

2- Montrer de manière générale que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (1{,}015)u_n - 300$.

3- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 20\,000$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b) Calculer alors v_n puis u_n en fonction de n.

4- Combien de mois sont-ils nécessaires à l'extinction de la dette ?

Calculer le montant S effectivement payé pour rembourser la somme s de 6000 €.

Exercice n° 29 (spécialité)

Une observation faite par un journal, sur ses abonnés, a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 75 % ainsi que l'apparition d'environ 4000 nouveaux abonnés.

L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel de ces abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.

On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1- Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n , $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 4000$.

2- Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n , par $u_n = 16\,000 - a_n$.

a) En exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n. En déduire que $a_n = 16\,000 - 6000 \times (0{,}75)^n$.

c) En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).

3- a) Résoudre, pour x appartenant à l'ensemble des nombres entiers, l'inéquation :

$$16\,000 - 6000 \times (0{,}75)^x > 15\,000$$

$\left(\text{on rappelle que } (0{,}75)^x = \mathrm{e}^{\,x \cdot \ln(0{,}75)}\right)$.

b) Déterminer la première année pour laquelle le nombre d'abonnés dépassera 15 000.

Exercice n° 30 (enseignement obligatoire)

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 700]$ par : $f(x) = 0{,}04x + 100 + \dfrac{540\,000}{x^2}$.

1- a) Calculer la limite de f en 0.

b) On note f' la dérivée de la fonction f. Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{(x-300)(x^2+300x+90\,000)}{25x^3}$.

c) Étudier les variations de la fonction f.

2- Dessiner la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, où 1 cm représente 50 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 20 unités sur l'axe des ordonnées.

Partie B :

On rappelle que le **coût marginal C_m** de la fabrication d'une quantité d'un produit est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire de ce produit. On considère que, dans la situation étudiée dans cette partie, le coût marginal est la dérivée de la fonction **coût total C** de la fabrication.

Une entreprise fabrique au plus 700 unités d'un produit.

Elle ne peut fabriquer moins de 100 unités : le coût total de fabrication de ces 100 premières unités est de 16 000 euros.

Le coût marginal C_m de fabrication de ce produit est décrit sur l'intervalle $[100, 700]$ par la fonction f étudiée dans la partie A. On a donc $C_m(x) = f(x)$ pour $x \in [100, 700]$.

On note $C(x)$ le coût total de la fabrication de x unités.

1- Montrer que pour tout $x \in [100, 700]$, $C(x) = 16\,000 + \displaystyle\int_{100}^{x} C_m(t)\,\mathrm{d}t$.

2- Calculer le coût total $C(x)$ pour $x \in [100, 700]$.

Exercice n° 31 (enseignement obligatoire)

Un restaurant spécialisé dans la restauration rapide propose trois menus différents aux tarifs suivants :

menu A	**menu B**	**menu C**
4 €	6 €	8 €

accompagnés éventuellement d'un dessert à 2 €.

Le responsable commercial du restaurant a fait réaliser une étude qui a donné les résultats suivants :

	nombre de clients	
	sans dessert	**avec dessert**
menu A	160	40
menu B	400	100
menu C	240	60

1- Établir les fréquences des six menus possibles.

Pour chaque client qui se présente on s'intéresse à la commande qu'il passe et on suppose que la probabilité de son choix est égale à la fréquence de ce choix trouvée lors de l'enquête.

On considère alors les événements suivants,

- A : « le client choisit le menu A »,
- B : « le client choisit le menu B »,
- C : « le client choisit le menu C »,
- D : « le client choisit un dessert ».

2- Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,2.

Déterminer les probabilités des événements A, B et C.

3- Trois clients déjeunent en même temps dans ce restaurant, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux choisissent un dessert, sachant que leurs choix sont indépendants les uns des autres ?

4- Montrer que les événements A et D sont indépendants.

5- Déterminer la loi de probabilité de la dépense d'un client.

6- Calculer l'espérance de cette loi.

Exercice n° 32 (enseignement obligatoire)

Un laboratoire propose un test de dépistage d'une certaine maladie. Ce test présente les caractéristiques techniques suivantes :

– La probabilité qu'un individu atteint de cette maladie ait un test positif est de 0,95.
– La probabilité qu'un individu non atteint de cette maladie ait un test négatif est aussi de 0,95.

On choisit un individu au hasard et on note :

– M l'événement « l'individu choisi présente la maladie étudiée » et $\overline{M}$ l'événement contraire.
– T l'événement « le test effectué sur l'individu est positif » et $\overline{T}$ l'événement contraire.

1- On veut faire un dépistage systématique dans une population donnée et l'on sait que la proportion d'individus atteints de la maladie dans la population est 0,001 (autrement dit 1 individu sur 1000 est atteint de cette maladie).

a) Réaliser un arbre pondéré décrivant cette situation.

b) Calculer la probabilité $P(T)$.

c) Calculer la probabilité $P_T(M)$ qu'un individu présentant un test positif soit atteint de la maladie. Ce nombre $P_T(M)$ représente la *valeur prédictive* du test.

2- On s'intéresse aux variations de cette valeur prédictive selon la proportion d'individus atteints de la maladie dans la population.

a) On considère une population à risque pour la maladie considérée. On sait que, dans cette population, 25 individus sur 100 sont atteints de cette maladie. Quelle est alors la valeur prédictive du test ?

b) On considère maintenant une troisième population et l'on note x la proportion d'individus atteints de la maladie. Déterminer en fonction de x la valeur prédictive $P_T(M)$ du test pour cette population. Pour quelle valeur de x, un individu dont le test est positif, a-t-il une chance sur deux d'être malade ?

Exercice n° 33 (enseignement obligatoire)

Un club de sport propose deux formules d'abonnements.

Formule A : une cotisation annuelle de 50 euros à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 1000 euros.

Formule B : une cotisation annuelle initiale de 100 euros qui augmente de 10 % par an. Cependant, dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 5 euros sur le montant de la cotisation annuelle. Ainsi, si C_n est le montant, exprimé en euros, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a $C_1 = 100$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1{,}1\,C_n - 5$.

1- Déterminer la somme totale T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.

2- Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n - 50$.

a) Montrer que la suite (D_n) est une suite géométrique de raison 1,1 et préciser son terme initial D_0.

b) Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.

3- a) Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.

Montrer que $S_n = 500\big(1{,}1^n - 1\big) + 50n$.

b) Au bout de combien d'années de cotisation la formule A devient-elle, au total, plus avantageuse que la formule B ?

On rappelle que pour tout réel q différent de 1 et tout entier naturel n non nul,

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$
