Classe de première ES

Orientations générales

Les objectifs de l'enseignement des mathématiques en classe de première ES figurent de façon détaillée dans le programme publié dans le *BO* hors série n° 8 du 31 août 2000. Le paragraphe 4 précise les domaines mathématiques à traiter en première ES : les deux premières colonnes (contenus et modalités de mise en œuvre) s'imposent à chacun, la troisième fournit quelques commentaires que le présent document vient compléter.
L'objectif de ce document d'accompagnement est d'aider à la compréhension du texte du programme et d'illustrer par des exemples les objectifs visés sur certains points particuliers. Il a pour fonction de faciliter les échanges et de permettre des régulations entre les acteurs concernés par l'application du programme ; une trop grande directivité, qui irait à l'encontre du maintien de l'espace de liberté pédagogique laissé à l'enseignant, n'est pas souhaitable. Il n'est bien sûr pas obligatoire de traiter les exemples et exercices proposés : ceux-ci peuvent être remplacés par d'autres situations relevant du même esprit.
Ce document prend en compte les résultats de la consultation du dernier trimestre 2000 sur les programmes de première et explicite certains items ; il sera mis à jour et complété en ligne, sur le site Eduscol (www.education.eduscol.fr). En effet, si les exégèses d'un programme convergent au bout d'un certain temps, ce n'est pas le cas lors de sa parution (sauf à transformer le programme en libellé d'un protocole éducatif strictement technique) ; le document d'accompagnement permettra un recentrage par rapport aux diverses interprétations et fera ainsi office d'outil de régulation de la mise en œuvre du programme.

Comme indiqué en introduction du programme, il a été choisi de proposer un enseignement de mathématiques consistant et adapté à la spécificité de la série ES.
On a donc privilégié quelques outils indispensables au traitement mathématique de l'information chiffrée ; d'où les deux grands titres fédérant les diverses notions abordées dans la partie obligatoire du programme : traitement des données et probabilités, d'une part, algèbre et analyse, d'autre part.

Il est conseillé de prévoir un tiers de l'horaire annuel sur le titre « *Traitement des données et probabilités* » et deux tiers sur « *Algèbre et analyse* ».

Pour l'option, les thèmes abordés sont relativement indépendants de la partie obligatoire ; ils sont en revanche partiellement corrélés à ceux de la spécialité de terminale : l'élève désirant choisir la spécialité « mathématiques » en terminale aura donc intérêt à suivre l'option de première (une telle position est cohérente avec le souci de responsabiliser les élèves dans leur choix de formation : la première n'est plus une classe d'orientation et il est normal que les choix faits pour la classe de première aient une incidence jusqu'en terminale).

Un apprentissage actif

Le passage à l'abstraction mathématique présente parfois quelques difficultés pour les élèves de cette section : il importe donc de veiller au caractère progressif et actif de l'apprentissage proposé à chaque élève. Questions et exemples seront systématiquement utilisés pour introduire les nouveaux concepts. Ces concepts seront alors mis en œuvre dans des exercices et problèmes qui en montreront la portée.

Expression et raisonnement

Les résultats acquis (théorèmes, techniques opératoires, etc.) seront clairement énoncés et leur statut explicité (admis ou démontré). On veillera à la qualité des raisonnements effectués. Dans le champ mathématique, les modalités du raisonnement sont variées ; la plupart ne sont pas propres aux mathématiques : formulation des questions et argumentation logique se retrouvent ainsi dans la dissertation en français, en philosophie et lors de travaux en enseignement scientifique. Par ailleurs, dans toutes les disciplines, c'est la même langue que l'on utilise, avec ses règles syntaxiques, ses mots de liaison logique ; à ce titre, le professeur de mathématiques participe au travail de maîtrise de la langue française, tout particulièrement de la syntaxe, et il importe que les élèves en aient conscience.

Importance de l'acquisition de quelques automatismes

Qu'il soit numérique, algébrique ou vectoriel, le calcul est une activité qui, dans sa diversité, est assez spécifique des mathématiques et sa pratique régulière est indispensable pour progresser. Calculs simples et règles opératoires mués en automatismes libèrent la pensée, facilitent la compréhension et permettent de se consacrer à d'autres tâches. La pratique régulière et individuelle des calculs que l'on peut faire à la main est une part indispensable et un moyen irremplaçable d'accéder à une bonne compréhension. Il ne s'agit pas de rechercher la virtuosité : calculatrices et ordinateurs ont rendu cet objectif inutile. Il ne suffit pas pour autant d'obtenir des résultats sur une machine : il faut d'abord anticiper un calcul, au moins dans sa forme, pour percevoir l'intérêt de sa mise en œuvre, puis savoir interpréter les résultats, juger de leur validité et de leur limite.

L'aide des outils de calcul

La mise en œuvre anticipée du programme de seconde dans une vingtaine de lycées durant l'année 1999-2000 a confirmé le grand intérêt de l'usage d'outils logiciels (ordinateurs et calculatrices) pour faciliter l'approche et l'assimilation de certains concepts. D'où, entre autres, les invitations nombreuses du programme à utiliser ces outils : l'expérience et la généralisation d'une telle pratique devraient permettre d'en tirer tout le bénéfice attendu.
Les derniers développements des calculatrices laissent présager un accès banal à des logiciels de calcul formel. Il s'agit de bien les intégrer à l'ensemble de la démarche d'apprentissage. Sans qu'ils détournent de l'entraînement nécessaire à la maîtrise des calculs les plus courants, ils peuvent représenter un moyen précieux de vérification pour des élèves conduisant encore difficilement sans erreurs un calcul élaboré.

À propos du titre « Traitement des données et probabilités »

Le choix a été fait de donner, pour la série ES, un rôle important aux séries chronologiques, particulièrement fréquentes dans les cours d'économie ; on veillera cependant à ce que les questions et exemples traités mènent à une réflexion conceptuelle, ce qui constitue une bonne préparation à d'éventuelles études ultérieures centrées davantage sur les pratiques professionnelles.

Pourcentages

Les élèves sont régulièrement confrontés à des informations chiffrées produites par d'autres : journalistes, historiens, géographes, économistes, etc. Ce paragraphe sur les pourcentages vise à développer la démarche intellectuelle et indispensable pour appréhender des données numériques, pour les déchiffrer avec précision et pour en comprendre le sens, la portée et les limites. Comme on l'indique dans le programme, il ne s'agit pas d'aborder ici quelques connaissances techniques nouvelles, mais d'entretenir des compétences de base qui pourront s'exercer tout au long de l'année dans de nombreux titres du programme : statistique (fréquences, données en pourcentage, évolution de séries chronologiques, etc.), suites géométriques (obtenues par augmentations ou baisses successives à pourcentage d'évolution constant), dérivation (approximation affine), etc.

On entraînera « à une pratique aisée des techniques élémentaires de calcul » ; en particulier, on travaillera sur le passage d'une formulation additive, souvent utilisée pour communiquer, à une formulation multiplicative plus adaptée au calcul, et réciproquement.

En ce qui concerne les pourcentages décrivant le rapport d'une partie au tout, on s'intéressera, sur des exemples, à différentes explications de la variation d'un pourcentage (variation de l'ensemble de référence ou de la partie étudiée) ; on observera que l'ordre des pourcentages rapportés à des ensembles de référence différents n'est pas toujours identique à celui des données absolues ; enfin, on calculera des pourcentages de pourcentages en relation avec l'étude des tableaux croisés.

En ce qui concerne les pourcentages d'évolution, on dégagera l'intérêt du coefficient multiplicatif dans les augmentations ou diminutions successives, dont la formulation additive est parfois trompeuse. Les calculs de prix hors taxes, de prix avant une réduction ou de pourcentages moyens d'évolution en seront autant d'occasions. On formulera aussi ces évolutions en terme d'indice (comparaison à la valeur prise une année choisie comme base 100). Enfin, en relation avec le chapitre sur la dérivation, on pourra utiliser les tableurs pour illustrer que 10 accroissements de 0,2 %, par exemple, peuvent être considérés comme un accroissement de 2 %, alors que 10 accroissements de 10 % ne peuvent pas être assimilés à un accroissement de 100 %.

Nature des données

On a parfois prôné, pour l'enseignement de la statistique, le recueil de données par les élèves eux-mêmes, cette pratique étant considérée comme motivante et permettant de percevoir le champ de l'aléatoire. La perception de l'aléatoire s'acquiert aussi par la simulation. Par ailleurs, pour de nombreuses questions que l'on peut se poser dans le cadre scolaire, des données existent : elles sont réactualisées chaque année, leur contenu est riche et elles sont accessibles dans des banques de données. Sans exclure complètement un recueil ponctuel de données par les élèves, à condition qu'il ne prenne pas beaucoup de temps, on s'appuiera avant tout sur des données existantes. L'élève devra prendre l'habitude de réfléchir sur la nature des données traitées : certaines sont des données brutes (par exemple, la série des hauteurs d'un fleuve mesurées en un point géographique précis tous les jours à la même heure) ; d'autres sont obtenues en prenant des moyennes de mesures brutes (séries des températures mensuelles en un point géographique précis, évolution sur une période de dix ans des dépenses de logement suivant les catégories socioprofessionnelles) ; certaines encore sont des moyennes mobiles : par exemple, dans la présentation des mesures de température quotidienne à une heure donnée en un point donné, on remplace parfois les températures brutes $x_0,\ldots, x_n$ par la série des moyennes mobiles $y_k,\ldots, y_{n-k}$, calculées ainsi :

$$y_i = \frac{1}{2k+1}\sum_{i-k}^{i+k} x_j \text{ , pour } i = k,\ldots, n-k.$$

On parlera de moyennes mobiles d'ordre $(2k + 1)$.

On montrera sur des exemples, avec $k = 1, 2$ ou 3, que la courbe obtenue en remplaçant les données brutes par les moyennes mobiles est plus lisse.

Effets de structure

Exemple 1

Le revenu moyen global des individus actifs d'une population (par exemple, la population parisienne) peut augmenter avec le temps alors que dans toutes les catégories socioprofessionnelles (CSP) le revenu baisse, l'augmentation globale étant liée à un changement de la répartition en CSP (à Paris, les CSP à faible revenu ont eu tendance à déménager en banlieue). La structure à une date donnée est ici la répartition des CSP à cette date.

Exemple 2 (d'après un exemple réel)

Une étude est faite sur la consommation et le succès de deux anti-migraineux A et B ; on trouvera ci-dessous les résultats d'un essai sur 1 600 personnes régulièrement atteintes de migraines.

Globalement, cet essai semble favorable à A, d'autant plus que les statisticiens notent que la différence des pourcentages de succès entre A (50 % de succès) et B (37,5 % de succès) n'est très probablement pas le fait de fluctuations d'échantillonnage.

	Succès	Échec	Totaux
A	600	600	**1 200**
B	150	250	**400**
Totaux	**750**	**850**	**1 600**

Parmi les 1 600 patients ayant participé à cet essai, il y a 900 femmes et 700 hommes. Regardons les résultats selon le sexe du patient :

	Succès	Échec	Totaux
A	100	300	**400**
B	80	220	**300**
Totaux	**180**	**520**	**700**

Hommes

	Succès	Échec	Totaux
A	500	300	**800**
B	70	30	**100**
Totaux	**570**	**330**	**900**

Femmes

Chez les hommes comme chez les femmes, le pourcentage de succès de A est légèrement inférieur à celui de B. Le renversement de tendance entre l'étude par sexe et l'étude globale tient au fait qu'une très forte proportion de femmes utilise A et que le succès des deux anti-migraineux est plus grand chez les femmes que chez les hommes : l'influence du sexe est ici au moins aussi importante que celle du choix du médicament et masque le rôle de ce choix au niveau des 1 600 patients. Il convient de ne considérer que les résultats des deux derniers tableaux ; pour chacun d'eux, les différences entre les proportions de succès de A et de B sont faibles et des calculs de statistique permettent de dire qu'ils peuvent être attribués à la simple fluctuation d'échantillonnage.

Diagrammes en boîtes

Il ne s'agit pas là d'un élément à part ; il sera introduit à l'occasion du traitement de données expérimentales ou d'activités de simulation. On trouvera en annexe quelques précisions sur les conventions utilisées à leur propos.

Étude fréquentielle de tableaux à double entrée

Les commentaires sur les pourcentages des lignes (resp. des colonnes) se feront simplement à partir des distributions de fréquences associées aux marges horizontales (resp. verticales). On ne construira pas les « tableaux théoriques » (on n'introduira pas de façon formelle les notions de sur et sous-représentation, celles-ci n'ayant vraiment de sens que si elles sont « significatives » au sens statistique).

Exemple 1

Sherlock Holmes, invité au manoir de Guildhall par la duchesse de Clifford, se voit proposer de résoudre une bien étrange question.

De nombreuses études historiques fort documentées et détaillées, à propos de quelques condamnations à la peine capitale, qui avaient fait grand bruit au XVI^{e} siècle, semblaient clairement prouver que les juges manquaient d'impartialité lorsque l'accusé n'était pas dans la mouvance du parti politique du duc de Clifford. Or, dans ses archives, la duchesse de Clifford venait de trouver des registres tenus par un de ses aïeux, passionné de justice et de statistique. Dans ces registres, on pouvait lire qu'entre 1515 et 1530, dans le comté d'York, il avait été prononcé 131 peines capitales pour meurtre. Parmi ces condamnés, 55 % étaient du parti du duc, alors que seulement 47 % des suspects jugés pour un meurtre pendant la même période l'étaient. La duchesse trouve ces chiffres en contradiction avec les études historiques classiques et demande donc à Sherlock Holmes où est « la vérité ».

« Élémentaire, mon cher Holmes », lui dit Watson, inversant leurs rôles pour cette étrange enquête. Il convient bien sûr de s'intéresser aussi aux opinions politiques de la victime.

1 – Entre 1515 et 1530, il y a eu 2 433 meurtres dans le comté d'York, dont la victime était du parti du duc. Le tableau ci-dessous donne les détails suivant que le suspect est du parti du duc de Clifford ou non (C ou NC), les colonnes indiquant la sentence (PC : peine capitale ; AS : autre sentence).

	PC	AS	Totaux
NC	48	239	287
C	72	2 074	2 146
Totaux	120	2 313	2 433

Comment Watson a-t-il construit le tableau ci-dessous et qu'en conclure ?

	PC	AS	Totaux
NC	16,7	83,3	100,0
C	3,4	96,6	100,0
Totaux	4,9	95,1	100,0

Remarque : les différences de pourcentages de condamnation à la peine capitale suivant que le suspect est C ou NC sont ici trop grandes pour être imputées à la fluctuation d'échantillonnage.

2 – En regardant les registres de l'aïeul de la duchesse de Clifford, Watson vit qu'entre 1515 et 1530, il y avait eu 4 764 meurtres. Le tableau ci-dessous donne les détails suivant que le suspect est C ou NC, les colonnes indiquant la sentence (PC : peine capitale; AS : autre sentence).

	PC	AS	Totaux
NC	59	2 448	2 507
C	72	2 185	2 257
Totaux	131	4 633	4 764

Construire un tableau analogue au deuxième tableau de la question 1 et le commenter. Faire l'étude lorsque la victime est NC.
Remarque : les différences de pourcentages de condamnation à la peine capitale suivant que le suspect est C ou NC, sans tenir compte du même caractère pour la victime, ou lorsque la victime est NC, peuvent être imputées à la fluctuation d'échantillonnage, *i.e.* ne peuvent pas être interprétées en faveur d'une partialité des condamnations.
Sherlock Holmes fit aussi remarquer qu'il suffisait, pour conforter les analyses des historiens, de constater qu'un meurtre dont la victime était du parti du duc de Clifford donnait beaucoup plus souvent lieu à une condamnation à la peine capitale qu'un meurtre dont la victime ne l'était pas. Quantifier et commenter cette opinion. Pour avoir le dernier mot, Watson rajouta qu'à cette époque et dans ce lieu, 90 % des habitants étaient du parti du duc de Clifford…

Exemple 2
Que signifient les tableaux ci-dessous et comment sont-ils déduits du premier d'entre eux ?
Les données concernent la répartition suivant le sexe et le poste (AS : agent spécial; P : personnel autre) des emplois au FBI au 31 janvier 1997.

	H	F	Totaux
AS	9 199	1 617	10 816
P	4 535	10 165	14 700
Totaux	13 734	11 782	25 516

	H	F	Totaux
AS	36,1	6,3	42,4
P	17,8	39,8	57,6
Totaux	53,9	46,1	100,0

	H	F	Totaux
AS	85,0	15,0	100,0
P	30,9	69,1	100,0
Totaux	53,8	46,2	100,0

	H	F	Totaux
AS	67,0	13,7	42,4
P	33,0	86,3	57,6
Totaux	100,0	100,0	100,0

Loi de probabilité

On recensera les propriétés mathématiques élémentaires de l'objet « distributions de fréquences » (cf. tableau ci-dessous) et on définira une loi de probabilité comme un objet mathématique ayant les mêmes propriétés.

Distribution de fréquences sur E = $\{x_1,\ldots, x_r\}$	Loi de probabilité sur E = $\{x_1,\ldots, x_r\}$
$(f_1,\ldots, f_r)$ $f_i \geq 0$; $\sum f_i = 1$ A$\subset$ E, fréquence de A : $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i$ Événement complémentaire : $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$ Événements A et B disjoints : $f(A \cup B) = f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$	$(p_1,\ldots, p_r)$ $p_i \geq 0$; $\sum p_i = 1$ A$\subset$ E, probabilité de A : $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$ Événement complémentaire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Événements A et B disjoints : $P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$

Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité. Une fréquence est empirique : elle est calculée à partir de données expérimentales, alors que la probabilité d'un événement est un « nombre théorique ». Les distributions de fréquences issues de la répétition d'expériences identiques et indépendantes varient (fluctuent), alors que la loi de probabilité est un invariant associé à l'expérience.

L'objectif est que les élèves comprennent à l'aide d'exemples (cf. « Modélisation d'expériences de référence » ci-dessous) que modéliser, c'est ici choisir une loi de probabilité. Il ne s'agit cependant en aucun cas de tenir des discours généraux sur les modèles et la modélisation.

En classe de première, une loi de probabilité P sur un ensemble fini est la liste des probabilités des éléments de E. À partir de cette liste, on définit naturellement les probabilités d'événements, c'est-à-dire implicitement une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0;1]$, qui sera encore désignée par P ; on fera remarquer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour des événements disjoints et que $P(E) = 1$.

Il est inutilement complexe, pour le cas des ensembles finis, de partir d'une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0; 1]$, vérifiant certains axiomes, puis de montrer que cette application est entièrement caractérisée par $(p_1,..., p_r)$.

Si tous les éléments d'un ensemble E ont la même probabilité, la loi de probabilité est dite *équirépartie* ; dans ce cas, la probabilité d'un événement est le quotient de son nombre d'éléments par le nombre d'éléments de l'ensemble.

L'expression « choisir au hasard » (resp. « selon une loi de probabilité P ») un nombre dans un ensemble fini E est admise et a même sens que : « on considère la loi de probabilité *équirépartie* sur E » (resp. la loi de probabilité P sur E). Par exemple, pour parler du modèle associé au lancer d'un dé, on dira que l'on choisit un nombre au hasard dans $\{1,…, 6\}$.

On évitera tout développement théorique sur le langage des événements et le calcul ensembliste qui en découle : ces notions et la pratique de la logique qu'ils impliquent (étude du complémentaire de l'événement « A ou B » ou de l'événement « A et B ») s'acquièrent au fil d'exercices.

Remarque : nous avons choisi pour l'enseignement secondaire d'employer le terme de loi de probabilité sur un ensemble, que celle-ci soit ou non la loi d'une variable aléatoire.

Modélisation d'expériences de référence

Modéliser une expérience aléatoire à valeurs dans un espace E, c'est choisir une loi de probabilité P sur E. Ce choix est en général délicat, sauf dans certains cas où des considérations propres au protocole expérimental conduisent à proposer *a priori* un modèle. Il en est ainsi des lancers de pièces ou de dés, pour lesquels des considérations de symétrie conduisent au choix d'un modèle où la loi de probabilité est équirépartie. Sans faire une liste de conventions terminologiques, on indiquera clairement que les termes « équilibré » et « hasard » indiquent un choix du modèle de l'expérience où intervient « quelque part » une probabilité équirépartie.

Modélisation à partir de fréquences

On se contentera, pour certains exercices, de fournir un modèle en indiquant dans un premier temps que des techniques statistiques ont permis de le déterminer et de le valider à partir de nombreuses données expérimentales. Pour déterminer et/ou valider un modèle probabiliste, le premier outil dont on dispose est un théorème de mathématiques appelé « loi des grands nombres », dont un énoncé intuitif est :

Dans le monde théorique défini par une loi de probabilité P sur un ensemble E, les fréquences des éléments de E dans une suite de n expériences identiques et indépendantes tendent vers leur probabilité quand n augmente indéfiniment.

Ou encore :

Si on choisit n éléments selon une loi de probabilité P, indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est voisine de P lorsque n est grand.

Simulation

L'exemple ci-dessous montre comment mêler diverses composantes d'un travail mathématique : observation, premières conjectures, expérimentation à plus grande échelle, puis obtention et preuve de certains résultats.

Exemple : somme de deux dés

En répétant cent fois de suite le lancer de deux dés et en effectuant la somme des points obtenus, on observe que certains résultats s'obtiennent plus souvent que d'autres.
À l'aide d'un tableur, par exemple, il est possible d'expérimenter à plus grande échelle : simulation d'un plus grand nombre de lancers de deux dés et construction du tableau des effectifs. L'inégale répartition des fréquences de chaque résultat est flagrante.
L'algorithme de simulation du lancer de deux dés sera conçu par l'élève et d'éventuelles erreurs (simuler un lancer de dé et doubler le résultat, simuler une loi uniforme sur {2,…, 12}) seront analysées.
La recherche d'un modèle théorique permet ensuite de faire les calculs.

Résultats pour 5 séries de 100 lancers

2	0,02	0,02	0,01	0,03	0,01
3	0,03	0,02	0,09	0,06	0,04
4	0,08	0,08	0,08	0,08	0,1
5	0,11	0,11	0,12	0,09	0,11
6	0,17	0,13	0,1	0,11	0,11
7	0,15	0,15	0,12	0,14	0,2
8	0,12	0,2	0,1	0,13	0,22
9	0,15	0,1	0,12	0,13	0,06
10	0,09	0,1	0,14	0,1	0,08
11	0,06	0,05	0,06	0,09	0,06
12	0,02	0,04	0,06	0,04	0,01

Cahier de statistique

Dans le document d'accompagnement de seconde, il était suggéré que l'élève ait un cahier de statistique où figurent les expériences et les simulations faites en classe ou à la maison, à la demande de l'enseignant ou selon sa propre initiative. L'élève pourra alors revenir en première sur des questions posées en seconde, compléter certaines expériences de l'année précédente et enrichir son cahier de nouvelles simulations, observations et questions concernant aussi bien les probabilités que la statistique et la simulation.

À propos du titre « Algèbre et analyse »

Le programme reprend pour l'essentiel le programme antérieur. L'usage du tableau de variations est cependant précisé ci-dessous.

Algèbre

Les systèmes d'équations linéaires de deux équations à deux inconnues ont été vus en seconde. Comme il est indiqué dans le programme, il s'agit de consolider l'interprétation géométrique de ces systèmes 2×2 à travers quelques exemples significatifs. C'est aussi à travers des exemples simples de problèmes de programmation linéaire que l'on amènera l'étude d'inéquations linéaires à deux inconnues et par là, la caractérisation d'un demi-plan.
De nombreux problèmes simples, mais comportant de vraies questions, conduisent assez naturellement à la résolution d'une équation du second degré. En gardant le même esprit qu'en seconde, cette résolution se fait en liaison avec la fonction trinôme et sa représentation graphique (« développer conjointement les traitements graphique, numérique et algébrique »). Certaines figures doivent être intériorisées et pour cela, il faut pratiquer des lectures graphiques : l'élève devra associer mentalement à un trinôme du second degré une figure (une parabole « tournée vers le haut ou vers le bas »), association qui permet de retrouver ou contrôler le signe du trinôme.

Généralités sur les fonctions

Un objectif de ce paragraphe est la manipulation explicite de sommes et produits de fonctions à travers quelques exemples et leurs représentations graphiques associées. On met en évidence le fait que, dans certains cas, on peut rapidement conclure sur les variations des fonctions obtenues et dans d'autres non, ce qui prépare ainsi la recherche de nouveaux outils pour étudier les variations d'une fonction. Toutefois, aucune étude systématique des variations de $u + v$ ni de uv n'est à mener.
La mise en évidence de quelques compositions de fonctions permet une meilleure compréhension des expressions algébriques et des règles de priorités, de la notion de variable et de celle de fonction. Interpréter $(x - 5)^2$ comme l'image de $x - 5$ par la fonction carré prépare la notion de composition de fonction formalisée en terminale. De même, illustrer le fait que composer une fonction avec une fonction croissante n'en modifie pas les variations permet de mieux comprendre la notion même de fonction croissante.

Tableau des variations d'une fonction

On admettra les conventions décrites dans l'exemple qui suit.
Supposons que l'étude des variations d'une fonction permette d'aboutir au tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

On considérera que le tableau de variations est une forme stylisée de représentation graphique. On admettra qu'il n'y a pas de « sauts » dans la courbe représentative sur un intervalle donné (notion intuitive de continuité qui sera précisée en terminale) et qu'une flèche inclinée correspond à une stricte monotonie. On pourra alors en déduire sans discours supplémentaire :
– des encadrements d'images ;
– le nombre de zéros de f.

Remarque : la notion de fonction a été approchée au collège et explicitée en seconde. Les élèves ont toujours des difficultés à se faire une idée précise et opérationnelle de ce nouvel objet souvent noté f. Ils confondent souvent les deux notations f et $f(x)$. Leur expérience des expressions algébriques dans lesquelles figure une inconnue est plus ancienne que celle des problèmes spécifiques aux fonctions. Au cours du cycle terminal, il y a de nombreuses occasions (dérivée, intégrale, etc.) de faire la distinction entre f et $f(x)$; la notion de fonction prendra donc peu à peu sa place dans l'esprit des élèves et la distinction entre fonction et image d'un point deviendra plus signifiante. Tout en visant cet objectif pédagogique, on évitera tout purisme excessif ; on expliquera et autorisera, à l'occasion, certains abus de langage (tels « la fonction $ax + b$ », « la fonction $x^2 + 1$ »), utilisés spontanément par les élèves, usuels en physique ou dans l'enseignement supérieur.

Dérivation

Dans le programme, il est suggéré d'éviter une approche préalable de la notion de limite d'une fonction en un point mais de s'appuyer sur une approche intuitive. Pour les quelques exemples de calcul traités, il suffit de préciser que les fonctions rencontrées au lycée ne présentent pas de saut et qu'une petite variation de la variable induit une petite variation de l'image.
Le programme évoque plusieurs approches possibles de la notion de dérivée en un point : passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée, zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice, lien avec la notion de coût marginal. Une certaine pluralité d'éclairages paraît indispensable pour bien appréhender cette question : pour ce faire, on pourra y revenir à plusieurs moments dans l'année de première ou de terminale.

Limites et comportement asymptotique

La notion de limite apparaît à deux reprises dans le programme : à propos de la dérivée et lors de l'étude du comportement asymptotique de certaines fonctions.
Comme déjà dit plus haut pour l'introduction de la dérivée, l'intuition suffira pour établir que $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$ pour les fonctions f « régulières » (polynômes, rationnelles ou avec radicaux) ; on fera observer aux élèves que cela correspond à un tracé de la courbe représentant la fonction sans lever le crayon (le terme de fonction continue sera introduit en terminale : il peut néanmoins déjà être utilisé ici de façon naïve). Dans tous les calculs de dérivée, on aboutit – après simplification par h – à ce type de fonction (comme d'habitude, on ne soulèvera aucune difficulté sur la présence sous-jacente d'un prolongement en 0 du taux d'accroissement simplifié par h).
On ne s'intéresse au comportement à l'infini que pour des fonctions très simples (voir programme). On s'appuiera là aussi sur l'intuition ; à partir de manipulations numériques (en donnant à x des valeurs successivement égales à 10^3, 10^6…) et de représentations graphiques, on donnera la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ des fonctions de référence x, x^2, x^3, $1/x$… On observera très vite que le comportement asymptotique d'un polynôme est donné par son terme de plus haut degré : on énoncera la règle opératoire correspondante. Pour les fonctions rationnelles, on se limitera à des exemples de fonctions se mettant facilement sous la forme indiquée par le programme : $ax + b + \varepsilon(x)$ (avec numérateurs et dénominateurs de degré au plus 2).
La représentation graphique de la fonction inverse faite en seconde donne une première approche de la limite de $1/x$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ou

par valeurs inférieures et de la notion d'asymptote « verticale » ; en première, on s'appuiera sur quelques manipulations numériques pour établir que si le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, alors le quotient tend vers l'infini, le signe étant à préciser.

À l'occasion de l'une de ces recherches de limite (dérivée, à l'infini ou en une borne finie pour une fonction rationnelle), on mentionnera les règles opératoires usuelles pour la limite d'une somme ou d'un produit.

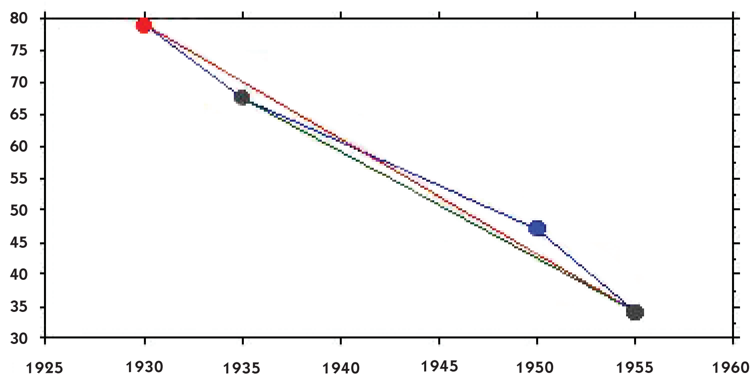
À propos de l'option

Compléments sur les fonctions

On recherchera des exemples de fonctions affines par morceaux dans les diverses disciplines de la série ES, mathématiques comprises. On pourra envisager quelques cas de recollement de morceaux par continuité (tels que la fonction « impôt sur le revenu ») et on s'appuiera pour ce faire sur l'intuition graphique. Il pourra être intéressant dans certains cas de faire rechercher aux élèves l'expression explicite de $f(x)$ sur chaque « morceau ».
En liaison avec le paragraphe statistique, on représentera la fonction $x \mapsto \Sigma|x - x_i|$ dans le cas d'une série (x_i) de petite taille et on vérifiera que la moyenne ne minimise pas nécessairement cette fonction.

Interpolation linéaire

Exemple 1
Les taux de mortalité infantile en 1930, 1935, 1950, 1955 sont respectivement 78,8 ; 67,6 ; 47,2 ; 34,2 ‰. Il manque les taux de mortalité en 1940 et 1945.
1 – Au vu du nuage des quatre points correspondant aux données, un élève estime ces deux taux par interpolation linéaire entre 1935 et 1950, un autre par interpolation linéaire entre 1930 et 1955, un autre entre 1935 et 1955. Calculer ces résultats et les comparer.
2 – Un quatrième élève estime que si l'on ne dispose pas des données en 1940 et en 1945, ce n'est pas fortuit, et qu'en conséquence l'interpolation linéaire n'est peut-être pas pertinente... Qu'en pensez-vous ?
3 – D'autres sources confirment les données pour 1930, 1935, 1950, 1955 et fournissent aussi les taux en 1940 et 1945 : 87,6 et 110 ‰. Pouvez-vous donner un sens à la différence entre les valeurs calculées en 1 et les valeurs réellement observées ?



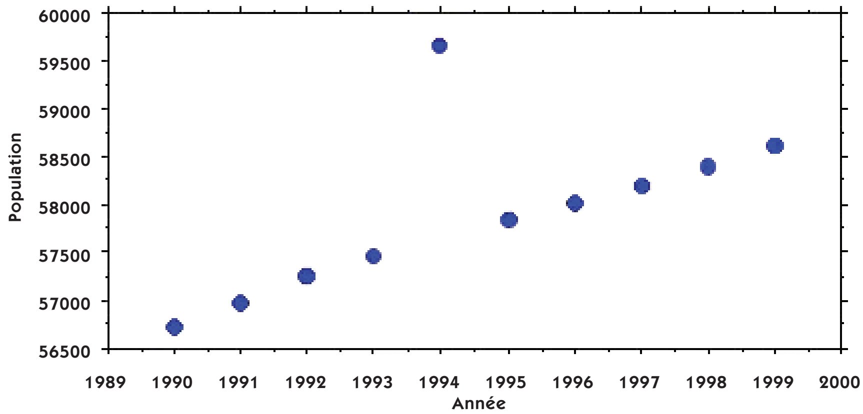
Exemple 2
L'INED (www.ined.fr) fournit des données annuelles sur la population française. Les recensements n'étant organisés que tous les six à neuf ans (les derniers datent de 1999, 1990, 1982, 1975, 1968, 1962), détermine-t-on par interpolation linéaire les données pour les années hors recensement ?

Voici pour information les « chiffres » de la population française (en milliers) fournis par l'INED pour les dix dernières années et recopiés :

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
56 710	56 978	57 242	57 470	59 661	57 847	58 029	58 210	58 398	58 620

– La représentation graphique montre qu'il semble y avoir une erreur de recopie de données en 1994. Un élève suggère de remplacer cette donnée par la moyenne des années 1993 et 1995, un autre par la moyenne des données de 1990 et 1998, un autre par la moyenne des quatre années précédentes et des quatre années suivantes. Comparer les résultats.

– Un élève retourne sur le site et lit, pour l'année 1994, une population de 57 661. Il lit aussi sur le site que des recensements n'ont été faits qu'en 1990 et 1999 ; pour les autres années, on a appliqué les formules données par un modèle. Quels seraient les chiffres si comme modèle on avait pris celui d'une croissance parfaitement linéaire entre 1990 et 1999 ?



Géométrie dans l'espace

Il s'agira avant tout, dans le fil de ce qui a été fait en classe de seconde, de géométrie « repérée ». L'objectif est d'aider à une meilleure vision des objets de l'espace et de parvenir au traitement analytique de quelques problèmes. La difficulté liée à la représentation des objets de l'espace est grande : on évitera donc de multiplier les situations à traiter à la main et on s'appuiera autant que faire se peut sur des dessins fournis par des logiciels ou préparés par l'enseignant.

Pour traiter cette partie, on peut utiliser des logiciels de construction géométrique dans l'espace et des logiciels de calcul formel disponibles sur ordinateur ou sur calculatrice. Des exemples de séquences mettant en œuvre ces logiciels peuvent être consultés sur le site Educnet, à l'adresse : www.educnet.education.fr/math/reforme.htm.

Exemple 1 : élections au pays des Cartes

(« Réécriture d'un énoncé » de J. Lubczanski, dans *Les Maths au jour le jour,* Éditions Cedic, 1985.)

Argine, Judith, Pallas et Rachel sont les quatre prétendantes au titre de Reine des reines. Au premier tour, Pallas obtient 19 % des suffrages, Judith 33 %, Rachel 16 % et Argine 32 %.

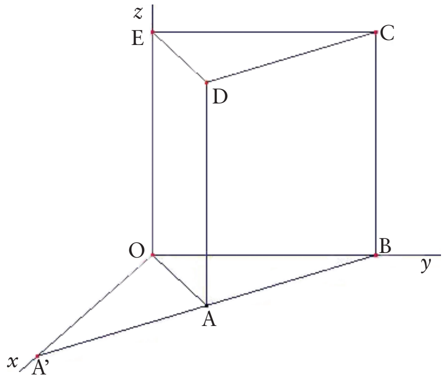
Seules les deux candidates arrivées en tête peuvent se maintenir pour le second tour ; tous les prévisionnistes de la politique se plongent dans les calculs pour anticiper les résultats définitifs. Ils admettent que :

– il n'y a pas de nouveaux électeurs au second tour et les électeurs ayant voté au premier tour pour Argine ou Judith ne modifieront pas leur vote au second tour ;

– parmi les électeurs ayant voté pour Pallas au premier tour, une proportion x reportera ses voix sur Judith au second tour, une proportion y, plus grande que x, se reportera sur Argine et les autres s'abstiendront ;

– parmi les électeurs ayant voté pour Rachel au premier tour, une proportion z votera pour Judith au second tour et les autres s'abstiendront.

1 – La donnée de (x ; y ; z) suffit donc pour déterminer le vote du second tour. Dans la représentation ci-dessous, on a visualisé graphiquement l'ensemble des situations de vote possibles au second tour [le repère $(O, \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ est orthonormal] : décrire cet ensemble et contrôler le dessin.



2 – Quelles relations entre les trois variables x, y et z traduisent le fait que Judith est élue au second tour ?

3 – À quelles situations de vote correspondent les points A, D et C ?

4 – À quelles régions de l'espace correspondent les situations suivantes :

a) Judith est élue ?

b) Judith et Argine sont *ex æquo* ?

c) Argine est élue ?

5 – Certains prévisionnistes assurent que :

a) si plus de 48 % des électeurs de Pallas votent pour Judith, alors Judith est élue ;

b) si plus de 95 % des électeurs de Pallas votent pour Argine, alors Argine est élue.

Leurs prévisions vous semblent-elles correctes ? Quelle est la plus petite valeur m de x qui garantit l'élection de Judith ?

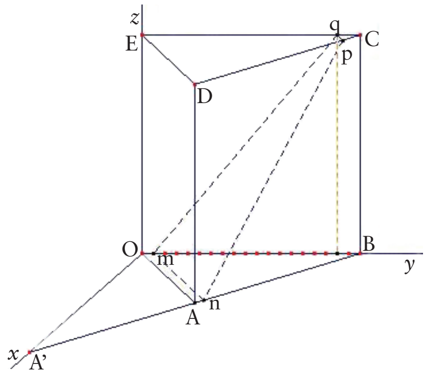
Donner un encadrement des votes que peut avoir Argine lorsque $x = m$.

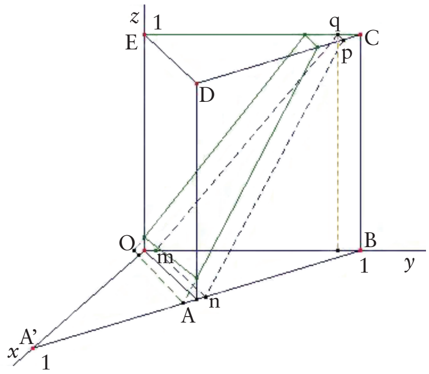
Quelle est la plus petite valeur de y qui garantit l'élection d'Argine ?

6 – Résultats :

En fait, le résultat du second tour a donné 51,5 % pour Judith et 48,5 % pour Argine (il s'agit des suffrages exprimés, c'est-à-dire que A/J = 48,5/51,5).

Trouver l'équation de l'ensemble des situations de vote correspondant à ce résultat.





Remarques : la recherche d'un tel problème permet la mise en œuvre de nombreux aspects de la géométrie dans l'espace comme les notions de plans parallèles aux axes de coordonnées, d'équations de plans, d'équations de droites dans un plan, d'intersection de plan et de droites, etc. À cette occasion, on admettra la propriété de régionnement de l'espace par un plan.

L'équation du plan des situations *ex æquo* paraîtra peut-être compliquée à certains élèves. On simplifiera éventuellement les calculs en considérant x, y et z comme des proportions de la population initiale : x représentera donc la proportion des suffrages exprimés au premier tour, qui étaient en faveur de Pallas au premier tour et qui seront reportés sur Judith au second…

Exemple 2 : un problème de « programmation linéaire »

(en complément de ce qui est traité dans l'enseignement obligatoire)

La résolution pourrait suivre une trame analogue à la trame ci-dessous :

Un polygone des contraintes dans le plan Oxy.

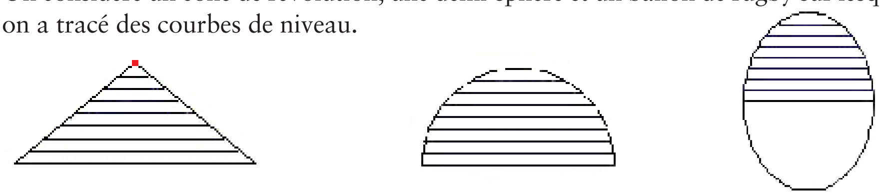
Une fonction coût ou bénéfice du type $z = ax + by + c$.

Dans l'espace,

- *le « cylindre » des solutions admissibles en (x,y) ;*
- *le plan d'équation $z = ax + by + c$ et ses lignes de niveau représentés dans le plan Oxy ;*
- *le point le plus haut de ce plan dans le « cylindre ».*

Exemple 3 : courbes de niveau sur un cône, sur une sphère, sur un « ballon de rugby »

On considère un cône de révolution, une demi-sphère et un ballon de rugby sur lesquels on a tracé des courbes de niveau.

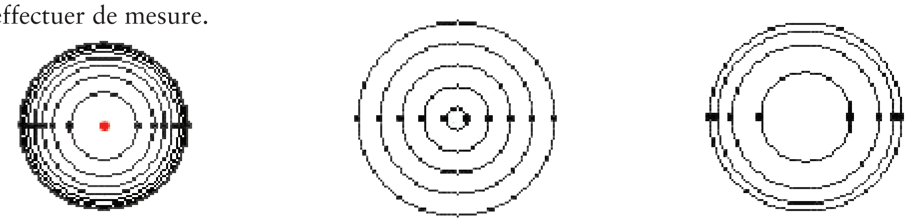


Voici, dans le désordre, comment ces courbes de niveau peuvent apparaître à un observateur placé au-dessus.

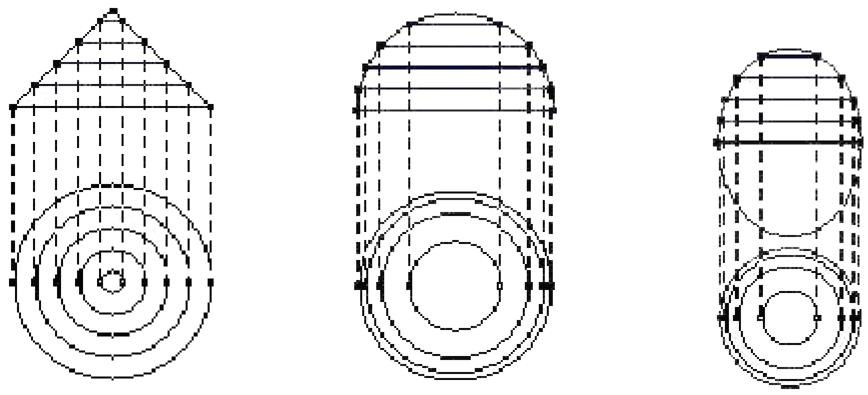
On peut être étonné de la différence des dessins.

À quel solide faut-il attribuer chacun des dessins ci-contre ?

Un logiciel de géométrie dynamique permet de les construire géométriquement sans effectuer de mesure.



Le calcul permet de préciser la suite des rayons obtenus dans le cas du cône et de la demi-sphère. Pour le ballon de rugby, le calcul n'est pas du niveau de la classe de première.



Cet exemple permet d'aborder, à partir d'objets géométriques élémentaires tels que le cône ou la sphère, la notion de fonction de deux variables, ici $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, de lire en contrôlant par le calcul quelques courbes de niveau et de comprendre jusqu'à quel point on peut reconstituer un objet de l'espace à partir de coupes parallèles à un plan donné.

Calcul matriciel

L'objectif est ici la description puis la résolution bien comprise de problèmes faisant intervenir de nombreuses données numériques. Dans un premier temps, on montrera l'intérêt de tableaux de nombres pour présenter certaines informations chiffrées : tableau à 1 ligne ou 1 colonne que l'on appellera vecteur-ligne ou vecteur-colonne, tableau à n lignes et p colonnes que l'on appellera matrice d'ordre $n \times p$. On prendra du temps pour poser correctement l'interprétation matricielle de la situation à décrire et il ne faudra pas hésiter, dans cette phase initiale, à légender le tableau de nombres pour en faciliter la compréhension.

Des exemples permettront ensuite d'introduire et d'illustrer les opérations (addition, multiplication par un nombre, multiplication) sur ces matrices : nous donnons quelques exemples ci-dessous. Il importe que les premiers calculs soient faits avec soin à la main : on n'utilisera qu'ultérieurement les outils de calcul (calculatrice, tableur, logiciel de calcul). Les premières propriétés de ces opérations sur les matrices, notamment l'associativité et la non-commutativité du produit de matrices carrées, seront mises en évidence.

Les matrices seront ensuite utilisées en complément du programme de la partie commune du programme de première ES pour résoudre des problèmes conduisant à des systèmes d'équations linéaires. Dans le cas où la solution est unique, on sera amené à rechercher l'inverse d'une matrice, mais aucune technicité ne sera exigée en la matière.

Les matrices interviendront dans le programme de spécialité de terminale ES pour résoudre des problèmes de théorie des graphes.

Vecteur-ligne (ou colonne) ou *n*-uplet

Exemples :

– le portrait scolaire d'un élève en fin de premier trimestre : (10, 7, 9, 12, 15, 10), où l'on a les notes de cet élève en français, mathématiques, économie, histoire-géographie, LV1 et EPS;

– le travail d'une station-service durant une journée : (2 500, 500, 1 800, 3 000), donnant les quantités (en litres) d'essence SP95, essence SP98, super et gasoil;

– le portrait politique d'un arrondissement : (15, 10, 3), donnant le nombre (en milliers) d'électeurs des partis A, B et C.

D'où la définition d'un vecteur ou n-uplet de réels A = $(a_1, a_2..., a_n)$ (que l'on pourra aussi noter en colonne).

Dimension d'un vecteur; égalité de deux vecteurs; somme de deux vecteurs; multiplication par un réel; propriétés de ces opérations.

Exercices : le travail d'une station-service durant une semaine; le portrait politique d'un département, d'une région; le portrait politique en pourcentage; etc.

Matrices

Exemples :

– notes de cinq élèves d'une classe;

– travail des quatre stations-service d'une agglomération;

– répartition des élèves d'un lycée selon l'orientation et la CSP du père; etc.

Définition d'une matrice $n \times p$ à n lignes et p colonnes (ou tableau de nombres); notation (a_{ij}).

Égalité de deux matrices; matrice transposée; un vecteur est une matrice $1 \times p$ ou $n \times 1$; matrice carrée, matrice carrée unité.

Addition de deux matrices de même dimension; multiplication par un scalaire.

Multiplication de matrices

Exemple 1 : chiffre d'affaires de n stations-service.
Définition de AX où A est une matrice $n \times p$ et X un vecteur-colonne de dimension p (donc une matrice de dimension $p \times 1$).

Exemple 2 : matrice A, 4×3, représentant le nombre de pièces de trois produits P_1, P_2 et P_3, fabriquées par 4 artisans durant un an ; matrice B, 3×2, donnant le nombre d'heures et le prix de la matière première pour fabriquer une pièce de chacun des produits P_1, P_2 et P_3. Comment obtenir le nombre d'heures et le prix de matière première par artisan par année ?
On définit ici le produit de deux matrices.

Exercices :
– Calcul de A^2, où A est une matrice de « connaissance » ou d'« incidence » : $a_{ij} = 1$ si i « connaît » ou « est relié à » j pour $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ sinon. Interprétation.
– Recherche de l'inverse d'une matrice 2×2 : position du problème, exemples simples.
– Puissances d'une matrice diagonale et exemples d'application.

Applications

Exemple 1 : portrait scolaire d'élèves
On pourra dresser le « portrait » scolaire d'un élève, noté en cinq matières, sous la forme d'un vecteur à cinq éléments représentant la moyenne en fin de premier trimestre dans les cinq matières ; deux autres vecteurs représentent cet élève aux deuxième et troisième trimestres et la moyenne de ces trois vecteurs constituera le portrait scolaire annuel de cet élève.
Cet exemple pourra être repris pour avoir le portrait d'un groupe d'élèves. Ainsi, pour un groupe de quinze élèves, on pourra le représenter d'abord par le tableau 15×5 ci-dessous, où l'on a légendé les lignes et les colonnes, puis simplement par la matrice M.

	M	A	Φ	F	EPS
E1	16	16	6	14	18
E2	12	15	5	9	14
E3	11	16	2	6	14
E4	18	13	2	10	15
E5	5	13	6	5	10
E6	13	16	6	10	15
E7	15	14	6	11	14
E8	16	15	6	11	15
E9	20	14	6	13	16
E10	12	15	3	8	14
E11	9	18	5	7	15
E12	12	17	2	7	15
E13	12	15	3	7	14
E14	8	16	6	7	13
E15	15	17	6	15	19

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 6 & 14 & 18 \\ 12 & 15 & 5 & 9 & 14 \\ 11 & 16 & 2 & 6 & 14 \\ 18 & 13 & 2 & 10 & 15 \\ 5 & 13 & 6 & 5 & 10 \\ 13 & 16 & 6 & 10 & 15 \\ 15 & 14 & 6 & 11 & 14 \\ 16 & 15 & 6 & 11 & 15 \\ 20 & 14 & 6 & 13 & 16 \\ 12 & 15 & 3 & 8 & 14 \\ 9 & 18 & 5 & 7 & 15 \\ 12 & 17 & 2 & 7 & 15 \\ 12 & 15 & 3 & 7 & 14 \\ 8 & 16 & 6 & 7 & 13 \\ 15 & 17 & 6 & 15 & 19 \end{pmatrix}$$

Si les matières envisagées ont des coefficients respectifs 4, 3, 2, 1, 1, on peut définir la matrice-colonne P des coefficients, puis la matrice-colonne P' des coefficients normalisés :

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } P' = \frac{1}{11} P$$

La matrice produit R = M × P' donne alors les notes finales des quinze élèves.

Remarque : si M est la matrice-ligne correspondant à un seul élève, M × P' donne la note moyenne de cet élève.

$$R = \begin{pmatrix} 14{,}182 \\ 11{,}574 \\ 10{,}465 \\ 12{,}682 \\ 7{,}810 \\ 12{,}570 \\ 12{,}835 \\ 13{,}539 \\ 14{,}784 \\ 10{,}997 \\ 10{,}894 \\ 11{,}598 \\ 10{,}863 \\ 10{,}033 \\ 14{,}273 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : portrait électoral

On dispose, pour une ville de 2 800 habitants, pour deux tranches d'âge (J : moins de 45 ans ; NJ : plus de 45 ans) et trois modes de vie (H_1, H_2, H_3), des pourcentages de vote pour trois candidats A, B, C au poste de maire :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 25 & 55 & 20 \\ 20 & 50 & 30 \end{pmatrix} \qquad H_3 = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \\ 40 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

Soient K_i les matrices définies par : $K_i = H_i/100$, $i = 1, 2, 3$.
Les répartitions entre jeunes et non jeunes selon les modes de vie H_1, H_2 et H_3 sont respectivement :

(100 100) (1 000 500) (100 1 000)

Considérons les trois matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1\,000 & 0 \\ 0 & 500 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1\,000 \end{pmatrix}$$

Interpréter les termes des matrices ($M_i \times K_i$), pour $i = 1, 2, 3$ ainsi que ceux de la somme S de ces trois matrices et ceux de la matrice D × S, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1/1\,200 & 0 \\ 0 & 1/1\,600 \end{pmatrix}$$

Au vu des matrices H_1, H_2 et H_3, l'équipe du candidat A dit que les jeunes ont mieux voté pour A que les non-jeunes. Pourtant, au vu des résultats globaux, les candidats B et C réfutent ces commentaires puisque parmi les 1 200 jeunes, 27,5 % votent pour A alors que parmi les 1 600 non-jeunes, 32,8 % votent pour A.
Qu'en pensez-vous ?

Exemple 3 : évolution d'un système

Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40 % des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20 % des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges.
Partant d'une population (c_0, b_0), quelle est la population deux ans après ? On introduira l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \text{ soit } E_1 = A \times E_0.$$

E_i représentant l'état de la population la i-ème année, on montre que $E_2 = A \times A \times E_0 = A^2 \times E_0$, puis que $E_3 = A^3 \times E_0$, etc., en faisant un produit de matrices carrées ligne par colonne pour calculer les puissances successives d'une matrice. On pourra étudier l'évolution sur n années ($n < 30$) suivant certains états initiaux et chercher pour quels états initiaux l'état du système est stable, en réfléchissant sur cette notion de stabilité : le nombre d'habitants respectifs de la capitale et du reste de l'île sont stables au cours du temps mais il y a toujours des gens qui partent de la capitale tandis que d'autres arrivent. On montrera que si un état d'équilibre s'installe, c'est un état stable. Cette notion de stabilité n'est pas au programme de première – il s'agit d'une première approche – : elle a un sens intuitif très fort dont il serait dommage de se priver et qui motive l'étude proposée.

Exemple 4 : les boîtes de céréales

Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales. Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 12 semaines, 15 personnes n'avaient que deux des trois images, a déclaré mensongère la publicité : « *Les images sont également réparties dans les paquets* ». Que penser de ce qu'il affirme ?
Considérons donc 1 000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte. Au bout d'une semaine, elles auront toutes une image. L'état E_n du système la n-ième semaine est un vecteur colonne à trois lignes : la première composante est le nombre a_n de personnes ayant une seule sorte d'images, la seconde est le nombre b_n de personnes ayant exactement deux images distinctes, la troisième est le nombre b_n de personnes ayant les trois images. On a : $a_1 = 1000$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$. On admettra, à partir d'une justification heuristique, que pour $n > 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= (1/3)\, a_{n-1} \\ b_n &= (2/3)\, a_{n-1} + (2/3)\, b_{n-1} \\ c_n &= (1/3)\, b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}$$

Écrire ces trois équations à l'aide d'une seule équation matricielle et observer l'évolution du système sur 12 semaines. On utilisera la calculatrice pour faire les calculs.
Commenter l'accusation de l'inspecteur des fraudes.
Ce type de problème sera repris dans l'option de terminale.